جامعة الشهيد حمه لخضر

قسم الفيزياء	كلية العلوم الدقيقة	جامعة الوادي
السنة ثالثة فيزياء	ميكانيكا الاحصاء	الاختبار النهائي

تمرين:
نعتبر نظام مكون من N جسيم متماثلين وغير متفاعلين داخل حيز حجمه V والطاقات الممكنة لكل جسيم تعطى بـ

$$\epsilon_n = n\epsilon, \quad n = 1, 2, 3.....\infty, \quad \epsilon \text{ ثابت موجب}$$

كل مستوي من مستويات الطاقة منحل n مرة، أي $g_n = n$.

1. أحسب دالة التوزيع لجسيم واحد وأستنتج دالة التوزيع للنظام.

(مساعدة: لحساب دالة التوزيع أحسب دالة التوزيع من أجل انحلال يساوي 1 ثم استنتج منها دالة التوزيع بانحلال يساوي n مستعملا العلاقة $ne^{-nx} = -\frac{d}{dx}e^{-nx}$)

2. أحسب الطاقة المتوسطة للنظام وناقش قيمها عند درجات حرارة مرتفعة ومنخفضة، أي من أجل $\epsilon << kT$ و $\epsilon >> kT$.

- هل يمكنك أن تفسر قيمة الطاقة المتوسطة المتحصل عليها عند درجات حرارة منخفضة؟

3. أحسب أنتروبي النظام.

4. نفترض أن $\epsilon = \frac{\alpha}{V^{1/3}}$ ، حيث α ثابت موجب. أحسب ضغط النظام. ، وجد علاقة مباشرة بين P , V ,والطاقة المتوسطة E. (أكتب PV بدلالة E)

الحل النموذجي للامتحان النهائي

في فيزياء الاحطاء سنة 3 ليسانس فيزياء

س1

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-\beta n \epsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} n\, e^{-\beta n \epsilon}$$ 1pt

نضع $0 < \beta\epsilon = x$

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} n\, e^{-nx} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{d}{dx} e^{-nx}\right)$$

$$= -\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \quad ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}}.$$

$$\Rightarrow z = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}\right) = \boxed{\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}}$$

$$\boxed{z = \frac{1}{4\,Sh^2 x/2}} \qquad \underline{x = \beta\epsilon}. \qquad 3\,pt$$

- $$\boxed{Z = z^N = \left(\frac{1}{2\,Sh\,\beta\epsilon/2}\right)^{2N}}$$ 1pt

$$E \simeq N\epsilon \times \frac{2kT}{\epsilon} = 2NkT$$ 2pt

$$\boxed{E \simeq 2NkT}, \quad kT \gg \epsilon$$

• نعم • عند درجات حرارة منخفضة نتوقع نزول جميع الجسيمات إلى المستوى الأدنى $\epsilon_1 = \epsilon$ 2pt
وعليه تكون الطاقة الكلية للنظام $N\epsilon = N \times \epsilon_1$.

س3/ الأنتروبي

$$S = \frac{E - F}{T} = \frac{N\epsilon \coth \beta\epsilon/2 - 2NkT \ln \beta\epsilon/2}{T}$$

$$F = -kT \ln Z$$ 2pt

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{N,T} = -2NkT \frac{\partial}{\partial V}\left(\ln 2 \sinh \beta\epsilon/2\right)$$ (4

$$= 2NkT \frac{\partial \epsilon}{\partial V} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \ln\left(2 \sinh \beta\epsilon/2\right)$$ 3pt

$$= 2NkT \frac{\partial \epsilon}{\partial V} \times \frac{\beta}{2} \coth \beta\epsilon/2 \; ; \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial V} = -\frac{\alpha}{3V^{2/3}} = -\frac{1}{3}\epsilon/V$$

$$\boxed{P = \frac{1}{3}\frac{\epsilon}{V} N \coth \beta\epsilon/2}$$

• باستعمال عبارة E من السؤال السابق

$$\boxed{PV = \frac{1}{3}E}$$ 1pt

$= -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$;

$\ln Z = -2N \ln 2 \sinh \beta\epsilon/2$.

$E = 2N \frac{\partial}{\partial \beta} \sinh \beta\epsilon/2 \Big/ \sinh \beta\epsilon/2$ 2 pt

$$\boxed{E = N\epsilon \coth \beta\epsilon/2}$$

- $\epsilon \gg kT \Rightarrow \beta\epsilon \gg 1$

$$\coth \beta\epsilon/2 = \frac{e^{\beta\epsilon/2} + e^{-\beta\epsilon/2}}{e^{\beta\epsilon/2} - e^{-\beta\epsilon/2}} \approx 1$$

($e^{\beta\epsilon/2} \rightsquigarrow \infty$, $e^{-\beta\epsilon/2} \rightsquigarrow 0$) 2 pt

$\Rightarrow$ $\boxed{E = N\epsilon \quad \epsilon \gg kT}$

- $\epsilon \ll kT \Rightarrow \beta\epsilon \ll 1$

$$\coth \beta\epsilon/2 = \frac{e^{\beta\epsilon/2} + e^{-\beta\epsilon/2}}{e^{\beta\epsilon/2} - e^{-\beta\epsilon/2}}$$

$$\approx \frac{1}{(\beta\epsilon/2)} = \frac{2kT}{\epsilon} \Rightarrow$$