جامعة الوادي

كلية العلوم الدقيقة — قسم الفيزياء

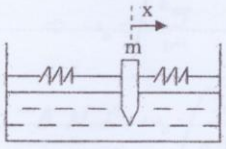
سنة 2 فيزياء — المدة: 1h30 — 09 جانفي 2018

الامتحان السداسي في مقياس الاهتزازات و الأمواج

التمرين 01 (11 نقطة):

نعتبر الهزاز المتخامد الحر المبين بالشكل المقابل و الذي يخضع إلى معادلة الحركة التالية:

$$m\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + k_{eq}x(t) = 0$$



الشكل 1

تعطى الشروط الابتدائية: $x(0) = 10\ cm$ ، $\dot{x}(0) = 0$

كذلك : $m=150\ g$ ، $k_{eq}=3,8\ N/m$.

أ/ في حالة عدم وجود التخامد $\alpha = 0$:

1- أحسب النبض الطبيعي للنظام ثم استنتج الدور T.

2- باعتبار النابضين متماثلين احسب ثابت مرونة كل منهما.

ب/ في حالة وجود التخامد $\alpha \neq 0$:

3- برهن أنه إذا كان : $\alpha=0,6\ kg/s$ فإن الحركة إهتزازية متخامدة.

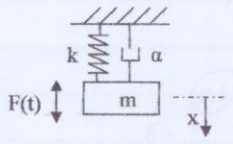
4- أحسب دور الحركة المتخامدة T_A.

5- نعوض السائل حتى نتحصل على معامل تخامد حرج α_c الذي يتناسب مع الحركة الحرجة.

أحسب إذن قيمة معامل التخامد الحرج α_c ثم أكتب الحل العام في هذه الحالة.

التمرين 02 (09 نقاط):

جملة ميكانيكية تتكون من كتلة و نابض و مخمد (الشكل 02) تؤثر عليها قوة خارجية توافقية قيمتها $F(t) = 5e^{i\omega t}$. فإذا أعطيت العلاقة بين سعة الاهتزاز القسري A للكتلة و تواتر الإثارة ω بيانيا كما هو موضح في الشكل 03.



الشكل 2

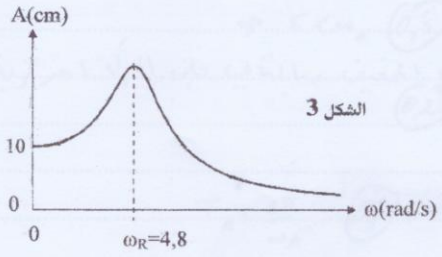
1- أوجد الطاقة الحركية و الطاقة الكامنة للجملة و دالة التبدد D.

2- أوجد المعادلة التفاضلية للحركة.

3- أوجد عبارة سعة الاهتزاز القسري A.

4- مستعينا بالمنحنى البياني و إذا علمت أن $\omega_0=5\ rad/s$،

فاحسب قيم عناصر الجملة الميكانيكية k ، m و ξ.



الشكل 3

بالتوفيق

التمرين 01:

أ/ 1- حساب ω_0:

لدينا المعادلة التفاضلية للحركة: $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + k_{eq}x = 0$

$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k_{eq}}{m}x = 0$

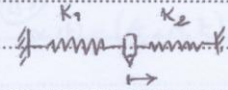
وهي من الشكل: $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (0,25)

$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$ (0,5)

A.N: $\omega_0 = \sqrt{\frac{3,8}{0,150}} = 5,03 \text{ rad/s}$ (0,5)

$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ (0,5) A.N: $T = \frac{2\pi}{5,03} = 1,25 \text{ s}$ (0,5)

2- حساب ثابت مرونة الناضض:



المرونة مكافئة بين الناضضين هي:

$k_{eq} = k_1 + k_2$ (0,5) / $k_1 = k_2 = K$

$k_{eq} = 2k \Rightarrow k = \frac{k_{eq}}{2}$ (0,25)

A.N: $k = \frac{3,8}{2} = 1,9 \text{ N/m}$ (0,5)

ب/ 3- مقارنة بين ω_0 و δ: (0,5)

لدينا: $\delta = \frac{\alpha}{2m} = \frac{0,6}{2\times0,15} = 2 \text{ s}^{-1}$ (0,5)

$\Rightarrow \delta < \omega_0$ (0,5)

وعليه فإن الحركة هي حالة من النوع الضعيف وبالتالي فإن الحركة الاهتزازية (0,25)

هي حالة شبه دورية.

4- حساب T_A:

لدينا $T_A = \frac{2\pi}{\omega_A}$ (0,5)

$\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ (0,5)

A.N: $\omega_A = \sqrt{(5,03)^2 - (2)^2}$

$\omega_A = 4,61 \text{ rad/s}$ (0,5)

$\Rightarrow T_A = 1,36 \text{ s}$ (0,5)

5- نحدد نمط الحركة:

$\delta = \omega_0$ (0,5)

$\Leftrightarrow \frac{\alpha_c}{2m} = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$

$\Rightarrow \alpha_c = 2\sqrt{k_{eq} \cdot m}$ (0,5)

A.N: $\alpha_c = 2\sqrt{3,8 \times 0,15}$

$\alpha_c = 1,5 \text{ kg/s}$ (0,5)

ومنه فإن الحل العام يكتب بالشكل:

$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\delta t}$ (0,5)

الشروط البدائية:

$t=0 \Rightarrow x = 10 \text{ cm}$

$t=0 \Rightarrow \dot{x} = 0$

$x(0) = A_1 = 10 \Rightarrow A_1 = 10 \text{ cm}$ (0,5)

$\dot{x}(t) = (A_2 - \delta A_1 - \delta A_2 t)e^{-\delta t}$ (0,5) / $\delta = \omega_0 = 5,03 \text{ rad/s}$

$\dot{x}(0) = A_2 - \delta A_1 = 0 \Rightarrow A_2 = \delta A_1 = 5,03 \times 10 = 50,3$ (0,5)

إذن:

$x(t) = (10 + 50,3t)e^{-5,03t}$ (0,25)

التمرين 02:

1.1

$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ (0,5)

$U = \frac{1}{2} k x^2$ (0,5)

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2 \quad (0,5)$$

2/

$$L = T - U$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \quad (0,5)$$

معادلة لاغرانج :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + F(t) \quad (0,5)$$

$$m\ddot{x} + kx = -\alpha \dot{x} + F(t)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{5}{m} e^{i\omega t} \quad \ldots (1) \quad (0,5)$$

3/ الحل يكون من الشكل : حل عام $x(t)$ و حل خاص $x_p(t)$

حيث : $x_p(t) = A e^{i(\omega t + \phi)} \quad \ldots (2) \quad (0,5)$

إن العبارة (2) تحقق العبارة (1) :

$$\ddot{x}_p(t) + \frac{\alpha}{m}\dot{x}_p(t) + \frac{k}{m}x_p(t) = \frac{5}{m} e^{i\omega t} \quad (0,5)$$

$$\left(-A\omega^2 + i\frac{\alpha}{m}\omega A + \frac{k}{m}A\right) e^{i\phi} = \frac{5}{m}$$

$$\left[\left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right) + i\left(\frac{\alpha}{m}\omega\right)\right] A = \frac{5}{m} e^{-i\phi}$$

$$= \frac{5}{m}(\cos\phi - i \sin\phi)$$

بالمطابقة نجد :

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right) A = \frac{5}{m}\cos\phi \quad (0,5) \\ \frac{\alpha}{m}\omega A = -\frac{5}{m}\sin\phi \quad (0,5) \end{cases}$$

بالتربيع و الجمع نجد :

$$\left[\left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{m}\omega\right)^2\right] A^2 = \left(\frac{5}{m}\right)^2$$

$$\Rightarrow A = \frac{5/m}{\sqrt{\left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right)^2 + \left(\frac{\alpha\omega}{m}\right)^2}} \quad \ldots (3) \quad (0,5)$$

و هي عبارة سعة الاهتزاز القسري .

4- حساب قيم عناصر الحلقة الكاسكة :

من البيان : $\omega = 0 \Rightarrow A = 10\ cm$ (0,5)

$$(3) \Leftrightarrow A(0) = \frac{5.1.m}{\frac{k}{m}} = \frac{5}{k}$$

$$\Rightarrow k = \frac{5}{A(0)} = \frac{5}{10 \times 10^{-2}} = 50\ N/m$$ (0,5)

لدينا : $(1) \Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (0,5) / $\omega_0 = 5\ rad/s$

$$\Rightarrow m = \frac{k}{\omega_0^2}$$

$$A.N. : \quad m = \frac{50}{25} = 2\ kg$$ (0,5)

لكن نعلم أن : $\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$ (0,5)

$$\Rightarrow \xi = \sqrt{\frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{\omega_R}{\omega_0}\right)^2\right]}$$ (0,25)

من البيان : $\omega_R = 4,8\ rad/s$ (0,25)

$$A.N. : \quad \xi = \sqrt{\frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{4,8}{5}\right)^2\right]}$$

$$\xi = 0,2$$ (0,5)