جامعة الــوادي — كـلـية العــلوم الدقيــقة

السنة الثانية (SM) — فيزياء — 2018/2017

امتحان الدورة العادية لمقياس الرياضيات (دوال المتغير غير الحقيقي)

التمرين الأول(05):

1) أ) حدد النقط الشاذة للدالة $g(z)$ حيث $g(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z^3-\dfrac{\pi}{4}z^2}$ ب) ما نوع هذه النقط؟

2) نعتبر التابع الحقيقي

$$\forall(x,y)\in IR^2,\quad Q(x,y)=2x-2xy$$

بين أنه توجد دالة وحيدة هلمورفية f تحقق $f(i)=-3$ حيث $Q=\operatorname{Im}(f(z))$

التمرين الثاني(07):

1) أعطي نشر لوران في جوار النقط الشاذة للتابع المركب $h(z)=\dfrac{z-1}{z^2-3z}$ في المنطقتين c_1 ، c_2 على الترتيب حيث $c_1=\{z\in C:|z|<3\}$ ،
$c_2=\{z\in C:|z|>3\}$

2) نعتبر سلسلة لوران التالية: $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n-4}$ ، حدد حلقة التقارب لهذه السلسلة ثم جد دالة مجموعها ضمن هذه الحلقة.

التمرين الثالث(08):

احسب التكاملات التالية:

1) $\int_{\gamma}\left(z^4-z^2+\dfrac{1}{z}\right)dz$ حيث $\gamma(0,r)$ يمثل دائرة مثلثية

2) $\oint_{c:|z|=1}\dfrac{\cos\dfrac{3}{2}\pi z}{(3z-2)^5}dz$

3) $\oint_{c:|z+1-i|=2}\dfrac{z^2}{(z+1-i)^2}dz$ ، *) باستخدام صيغة كوشي

**) باستخدام التكامل المنحني أي (بوضع $z+1-i=2e^{i\theta},0\le\theta\le 2\pi$).

بالتوفيق

2?/?/2017 تصحيح امتحان الدورة العادية 2 SM

التمرين الأول:

$g(z) = \frac{\sin^2 z}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2} = \frac{\sin^2 z}{z^2(z-\frac{\pi}{4})}$

النقاط الشاذة: (1) $z=\frac{\pi}{4}$ ، $z=0$

$\lim_{z\to 0} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 \frac{1}{z-\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{\frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{\pi}$ ، $\lim_{z\to\frac{\pi}{4}} g(z)(z-\frac{\pi}{4}) = \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 z}{z^2} = \frac{8}{\pi^2}$

$\varphi(x,y) = 2x + 2xy$ ، $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2 + 2y \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$ ، $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2x \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$

$\frac{\partial Q}{\partial y} = 2x = \frac{\partial P}{\partial x} \Rightarrow P(x,y) = x^2 + C(y)$

$\frac{\partial P}{\partial y} = C'(y) = -\frac{\partial Q}{\partial x} = -2 - 2y \Rightarrow C(y) = -y^2 - 2y + k$

$P(x,y) = x^2 - y^2 - 2y + k$

$f(z) = x^2 - y^2 - 2y + k + 2ix + 2ixy = (z^2 + 2iz + k) \Rightarrow f(z) = z^2 + 2iz$

التمرين الثاني

$R(z) = \frac{z-1}{z^2-3z} = \frac{1/3}{z} + \frac{2/3}{z-3} = \frac{1}{3z} + \frac{2}{3(z-3)}$ ، $0<|z|<3$

$\frac{2}{3(z-3)} = -\frac{2}{9}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{3}}\right) = -\frac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$

$R(z) = \frac{1}{3z} - \frac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$ ، $3<|z|$

$\frac{2}{3(z-3)} = \frac{2}{3z}\left(\frac{1}{1-3/z}\right) = \frac{2}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n$ ، $R(z) = \frac{1}{3z} + \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-4}}{(2n)!} = \frac{1}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \frac{\cos z}{z^4}$ ، $\forall z \in \mathbb{C}$

$\int_C (z^4 - z^2 + \frac{1}{z}) dz = \int_C (z^4 - z^2)dz + \int_C \frac{dz}{z} = 0 + 2\pi i$

$\oint_{|z|=1} \frac{\cos\frac{\pi}{2}z}{(3z-2)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!\,27} f''(z_0)\Big|_{z=\frac{2}{3}}$

$\oint_{|z+1-i|=2} \frac{z^2}{(z+1-i)^2} dz = \frac{2\pi i}{1}\cdot 2(-1+i) = -4\pi(1+i)$

$z = -1+i+2e^{i\theta}$

$\oint \frac{z^2}{(z+1-i)^2}dz = \int_0^{2\pi} \frac{(2e^{i\theta}-1+i)^2}{4e^{2i\theta}}\, 2ie^{i\theta} d\theta = -4\pi(1+i)$