Université Hamma Lakhdar, El-Oued — 1^{ere} mast

Département de Mathématiques — 2017/2018

Examen de topologie générale

Exercice 01 :(6pts)

1. Dans un espace métrique, montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
2. Montrer que tout espace métique compact est complet.
3. Donner un exemple d'une famille des fonctions uniformément équicontinue.
4. Enoncer le théorème de Baire.

Exercice 02 :(7pts)

On considère pour $x, y \in \mathbb{R}, d_f(x;y) = |f(x) - f(y)|$, où f est une fonction strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Verifier que d_f est une distance.
2. Supposons que f est continue. Soit $y_n = f(x_n)$ une suite dans $f(\mathbb{R})$ qui converge vers $y = f(x)$. Montrer que (x_n) est bornée.
3. Montrer que (x_n) est covergente vers x. En deduire que f^{-1} est continue.
4. Si f est continue. Montrer que $(\mathbb{R}, d_f)$ est complet si et seulement si $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Exercice 03 :(7pts)

Soit $\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}),\ \int_0^1 |f(t)|^2 dt + \int_0^1 |f'(t)|^2 dt \leq 1\}$

1. Rappeler pourquoi il existe $x_0 \in [0,1]$, tel que $\inf\limits_{x \in [0,1]} |f(x)| = |f(x_0|$?.
2. verifier que pour tout $x \in [0,1]$ on a $(|f(x)| - |f(x_0|)^2 \leq \int_0^1 |f'(t)|^2 dt$.
3. Montrer que pour tout $x, y \in [0,1]$ avec $y \geq x$ on a $|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{y - x}$.
   En deduire que $\mathcal{H}$ est équicontinue.
4. Montrer que $\mathcal{H}$ est relativement compact.

Note : Pour les deuxième et troisième questions, vous pouvez utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\int_0^1 |fg| \leq (\int_0^1 |f|^2)^{\frac{1}{2}} (\int_0^1 |g|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Correction d'Examen

أبو لوحة
[illegible]

Ex 01 : (questions de cours)

1) Si (x_n) une suite convergente, alors : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, d(x_n, x)$
pour tout $n, m \geq n_0$, on a : $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
Donc (x_n) est de Cauchy.

2) Soit (x_n) une suite de Cauchy, puisque l'espace est compact, on peu extraire une sous-suite (x_{n_k}) convergente vers x, et on a :
$d(x_n, x) \leq d(x_{n_k}, x_n) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc $x_n \longrightarrow x$.

3) $\mathcal{H} = \{ f \in C^1([0,1], \mathbb{R}),\ |f'(x)| \leq K \}$, $K \geq 0$
$\mathcal{H}$ est une famille uniformément équicontinue

4) Théorème de Baire : Soient (X, d) un esp métrique, $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite d'ouverts denses dans X, alors $\bigcap_{n \geq 0} A_n$ est dense dans X

Ex 02 :

1) d_f est une métrique ? $d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$

* $d_f(x, y) = 0 \iff f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$ (car f est strictement croissante)
* $d_f(x, y) = |f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = d_f(y, x)$
* $d_f(x, y) = |f(x) - f(z) + f(z) - f(y)| \leq d_f(x, z) + d_f(z, y)$

2) $y_n \longrightarrow y = f(x)$. Soit $b \in \mathbb{R}$, tel que $f(x) = f(b)$ (b existe car $\mathbb{R}$ non borné
Alors. $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, d(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$, $\Longrightarrow$ pour $n \geq n_0$, $f(x_n) < f(b)$
f est strictement croissante, alors $x_n < b$. Donc :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n < b' = \max(b, x_i), \quad i = 1, \ldots, n_0 - 1.$
De même manière, on trouve. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a' = \min(a, x_i) < x_n$, $i = 1, \ldots, n_0$
Ce qui montre (x_n) est bornée.

3) (x_n) est bornée, il existe une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers ℓ
et on a : $f(x_{n_k}) \longrightarrow f(\ell)$ (f est continue), mais $f(x_n) \longrightarrow f(x)$, donc
$f(x) = f(\ell) \Longrightarrow x = \ell$. Donc $x_n \longrightarrow x$

-) Si $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, soit (x_n) une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}, d_f)$. alors (y_n) est une suite de Cauchy pour la distance usuelle, où $y_n = f(x_n)$, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet, donc (y_n) est convergente vers y dans $\mathbb{R}$, ce qui implique $y_n \longrightarrow y \in \mathbb{R}$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$,

$$y = f(x) \Rightarrow y_n = f(x_n) \longrightarrow y = f(x)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y_n) = x_n \longrightarrow x = f^{-1}(y) \quad (f^{-1} \text{ est continue})$$

Donc $(\mathbb{R}, d_f)$ est complet.

Si $(\mathbb{R}, d_f)$ est complet. Soit $y \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est fermé), il existe $(y_n) \subset \mathbb{R}$, telle que $y_n \longrightarrow y \Rightarrow y_n$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$
f^{-1} est continue $\Rightarrow (f^{-1}(y_n))$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, d_f)$ qui est complet,
donc (x_n) $(x_n = f^{-1}(y_n))$ est convergente vers x dans $(\mathbb{R}, d_f)$
c'est à dire $f(x_n) \longrightarrow f(x) = y \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)$.

Ex 03:

1) Comme f et $x \mapsto |x|$ sont continues sur un compact $[0,1]$, alors il existe $x_0 \in [0,1]$, tel que $|f(x_0)| = \inf_{0 \le x \le 1} |f(x)|$

-) $$\left(|f(x)| - |f(x_0)|\right)^2 \le \left(|f(x) - f(x_0)|\right)^2 = \left(\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt\right)^2 \le |x - x_0| \int_0^1 |f'(t)|^2\,dt$$
$$\le \int_0^1 |f'(t)|^2\,dt, \quad (|x - x_0| \le 1).$$

-) Pour $x, y \in [0,1]$, $y \ge x$, on a :
$$|f(x) - f(y)| = \left|\int_x^y f'(t)\,dt\right| \le \sqrt{y-x} \int_0^1 (f'(t))^2\,dt$$
$$\le \sqrt{y-x}$$

Donc pour : $\alpha = \varepsilon^2$, on obtient par définition S_f est ~~[illegible]~~ équicontinue
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha = \varepsilon^2$, $|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \sqrt{y-x} < \varepsilon$.

-) Pour montrer que S_f est relativement compact, il reste vérifier que f est uniformément bornée.