Université Echahid Hamma Lakhdar d'El-Oued

Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

$2^{ème}$ année Master Mathématiques LMD
Date : 09/01/2018 Durée : 1^h30

Contrôle du module Théorèmes Fondamentales de la Topologie

Exercice 1. (6pts)
Soit E un espaces vectoriels topologiques,

1. Montrer que si V un voisinage de zéro, et si $(r_n) \subset \mathbb{R}_+^*$ est une suite croissante qui converge vers l'infini, alors $E = \cup_{n=1}^{\infty} r_n V$. (3pts)
2. Montrer que si U un voisinage ouvert équilibré de 0, et si K un compact, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $K \subset \lambda U$. (3pts)

Exercice 2.(7pts)

1. Soit $E = [0, 1]$, $F = [-1, 1]$, $f_n(x) = \frac{1}{n^2+1} sin(n^3 x)$, on note $\mathcal{F} = \{f_n / n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est équicontinu. (3pts)
2. Soit X un espace métrique compact et soit $\mathcal{H}$ une partie équicontinue de $C(X, \mathbb{R})$. On note par A l'ensemble des $x \in X$ tels que $\{f(x), f \in \mathcal{H}\}$ est borné. Montrer que A est à la fois ouvert et fermé. (4pts)

Exercice 3.(7pts)
Soit f une application lineaire continue d'un Banach X dans lui même telle que :

$$\forall x \in X;\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \ f^n(x) = 0$$

1. Montrer que si F est un sous espace vectoriel de X, tel que $\mathring{F} \neq \phi$, alors $F = X$. (3pts)
2. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$, tel que $f^N = 0$. (4pts)
   Indication: Appliquer le théorème de Baire avec les ensembles $Kerf^n$.

....

- $C(X, \mathbb{R}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R}; f$ continues sur $X\}$.
- $f^n = fo...of$ les composantes n fois de f.
- Si g est un application lineaire continue d'un Banach X, alors $Kerg = \{x \in X;\ g(x) = 0\}$ est un sous espace vectoriel fermé de X.

Ex(03):

1/ F : s.e.v de X / $\mathring{F} \neq \emptyset$

- Soit $a \in \mathring{F} \Rightarrow \exists r > 0$; $B(a,r) \subset F$ —— 0,5
- $\forall x \in X - \{a\} \Rightarrow \frac{r}{2}\left(\frac{x-a}{\|x-a\|}\right) + a \in B(a,r) \subset F$ —— 1

$\Rightarrow \frac{r}{2}\left(\frac{x-a}{\|x-a\|}\right) \in F$; [puisque $-a \in F$] —— 0,5

$\Rightarrow x - a \in F$ $\left(x-a = \frac{2\|x-a\|}{r}\left[\frac{r}{2}\frac{(x-a)}{\|x-a\|}\right] \in F\right)$ 0,5

$\Rightarrow x \in F$ $(x = (x-a) + a \in F)$ 0,5

donc : $X = F$ | 03

2/ • $\exists$ X est un espace de Banach, alors X est un espace de Baire. 01

- Sous la condition, alors $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Ker} f^n$ 01
- On note que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\operatorname{Ker} f^n$: fermé 0,5 | 04

Alors $\exists N \in \mathbb{N}^*$; $\overset{\circ}{\overline{\operatorname{Ker} f^N}} \neq \emptyset$ —— 0,5

donc : $\operatorname{Ker} f^N = X$ —— 0,5

i.e : $f^N = 0$. —— 0,5

07

Théorèmes fondamentaux de la topologie — الحل النموذجي لامتحان
الموسم الجامعي 2017/2018.

Ex(01): E : e.v.t

1/. Soit $V \in \mathcal{V}(0)$; $r_n \nearrow +\infty$:

- Soit $u \in E$; on a $\left(\frac{u}{r_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right)$ ... 01

alors : $\left(\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ \frac{u}{r_n} \in V\right)$ ... 0,5 — 03

il vient : $u \in r_n V$: $\forall n \geq n_0$ ... 0,5

d'où on conclut que : $u \in \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V$ ... 0,5

i.e $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V$ ... 0,5 — 06

2/. $U \in \mathcal{V}(0)$ on a : $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU$ ... 01

- U ouvert, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: nU ouvert ... 0,5

(puisque : si $n \neq 0$: $\gamma_n : x \mapsto \frac{1}{n}x$, continue : on a $\gamma_n^{-1}(U) = nU$ ouvert)

- Alors $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nU$ avec K compact ; on a : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: / $K \subset \bigcup_{n=1}^{n_0} nU$ ... 01 — 03

- Puisque U équilibré ; on a : $\forall n \in \{1, \dots, n_0\}$: $nU \subset n_0 U$ 0,5

donc $K \subset n_0 U$ ... 0,5

Ex(02):

1/. $E = [0,1]$; $F = [-1,1]$: $f_n : E \to F$: $f_n(x) = \frac{1}{n^2+1}\sin(n^3 x)$;

- $\forall x,y \in E$: $|f_n(x) - f_n(y)| = \frac{1}{n^2+1}\left|\sin(n^3x) - \sin(n^3y)\right|$

$$= \frac{2}{n^2+1}\left|\cos\left(n^3\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{n^3(x-y)}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{2}{n^2+1}\left|\sin\left(\frac{n^3(x-y)}{2}\right)\right|$$ — 01

- Mais : $\forall u \in \mathbb{R}$: $|\sin u| \leq 1 \Rightarrow |\sin u|^{3/2} \leq |\sin u| \leq |u|$

$\Rightarrow |\sin u| \leq |u|^{2/3}$. 0,5

.../(01)