Université Echahid Hamma Lakhdar - El-Oued 14-01-2018
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques $2^{\text{ème}}$ **Année Master (Mathématiques Fondamentales)**

Espaces fonctionnels et théorèmes du point fixe **Examen (corrigé)**

Exercice 1 (7 points)
Soient un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}$, et $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions réelles dans $L^p(E)$, où $p \in [1,\ +\infty[$.

(A) Montrer que si
   (a) f_n converge simplement presque partout sur E vers une fonction f,
   (b) et f_n converge dans $L^p(E)$ (au sens de $L^p(E)$) vers une fonction g,

   alors on a $f = g$ presque par tout sur E.

(B) Supposons que la suite $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ est définies sur $E := [0, +\infty[$, par :

$$f_n(x) := \sqrt{n}\,\chi_{[n,\, n+\frac{1}{n}]}(x) \quad \forall x \geqslant 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Démontrer les affirmations suivantes.
   (i) Si $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ converge fortement vers une fonction f dans $L^2([0,\ +\infty[)$, alors $f = 0$.[1]
   (ii) La suite $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers 0 dans $L^2([0, +\infty[)$.
   (iii) La suite $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ ne converge pas fortement dans $L^2([0, +\infty[)$.
   (iv) La suite $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ converge fortement vers 0 dans $L^p([0, +\infty[)$ pour $p < 2$.

Solution :

(A) *(sur 3 points)*

D'après la réciproque du théorème de la convergence dominée, (b) implique qu'il existe une sous-suite $\{f_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ qui converge simplement presque partout sur E vers la fonction g. Ainsi, tenant compte de l'hypothèse (a), on a nécessairement $f = g$ presque partout sur E.

(B)

(i) *(sur 1 point)*

Puisque pour tout $x \in [0,\ +\infty[$ il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que $\forall n \geqslant N$, $x \notin [n,\ n + \frac{1}{n}]$, il est facile de vérifier que la suite $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ converge simplement presque partout vers 0. Donc, d'après le résultat du point (A), on déduit que $f = 0$.

(ii) *(sur 1 point)*

La suite $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ étant bornée dans $L^2([0,\ +\infty[)$ (on a $(\int_0^{+\infty}(\sqrt{n}\,\chi_{[n,\, n+\frac{1}{n}]}(t))^2dt))^{\frac{1}{2}} = 1$, $\forall n \geqslant 1$), sachant que l'espace des fonctions à support compact est dense dans $L^2([0,\ +\infty[)$, il suffit de montrer que pour toute fonction φ à support compact on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \varphi(t) f_n(t)dt = 0. \tag{1}$$

En effet, le support de φ étant compact, il est borné dans $[0,\ +\infty[$, donc à partir d'un certain entier n l'intersection entre le support de φ et l'intervalle $[n,\ n + \frac{1}{n}]$ est vide, autrement dit l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t) f_n(t)dt = 0$:

$$supp(\varphi) \text{ borné } \implies \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n > N \text{ on a } supp(\varphi) \cap [n,\ n + \frac{1}{n}] = \emptyset.$$

D'où $\int_0^{+\infty} \varphi(t) f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t) \sqrt{n}\,\chi_{[n,\, n+\frac{1}{n}]}(t)dt = 0$, $\forall n > N$. Ce qui montre que (**??**).

[1]Utiliser le résultat du point (A).

(iii) *(sur 1 point)*

D'après le point (i), si la suite $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ converge fortement dans $L^2([0,\,+\infty[)$, alors elle converge vers la fonction nulle. Ceci est impossible puisque on a

$$\|f_n\|_{L^2} = (\int_0^{+\infty} (\sqrt{n}\,\chi_{[n,\,n+\dfrac{1}{n}]}(t))^2 dt))^{\frac{1}{2}} = 1,\ \forall n \geqslant 1.$$

(iv) *(sur 1 point)*

Il suffit de calculer la valeur de $\|f_n - 0\|^p_{L^p} = \|f_n\|^p_{L^p}$ en fonction de n, et de passer à la limite lorsque $n \to +\infty$.

$$\|f_n\|^p_{L^p} = \int_0^{+\infty} (\sqrt{n}\,\chi_{[n,\,n+\dfrac{1}{n}]}(t))^p dt = \int_n^{n+\frac{1}{n}} n^{\frac{p}{2}} dt = n^{(\frac{p}{2}-1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,\ \text{si}\ p < 2.$$

Exercice 2 (5 points)
Soit la f la fonction réelle définie par $f(x) = e^{-x^2}\cos(e^{2x^2}),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(i) Montrer que f est une fonction à décroissance rapide.

(ii) Montrer que la dérivée $f^{'}$ n'est pas une fonction à décroissance rapide.

(iii) Est-ce que f appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$?

(iv) Rappeler la définition d'une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$.

Solution :

(i) *(sur 1,5 point)*

D'après la définition d'une fonction à décroissance rapide, il suffit de montrer que pour tout indice $\alpha \in \mathbb{N}$ on a

$$\lim_{|x|\to+\infty} |x^\alpha f(x)| = \lim_{|x|\to+\infty} |x^\alpha e^{-x^2}\cos(e^{2x^2})| = 0.$$

Ce qui est vrai, puisque d'une part $|\cos(e^{2x^2})| \leqslant 1\ \forall x \in \mathbb{R}$, et d'autre part on a $\lim\limits_{|x|\to+\infty} |x^r e^{-x^2}| = 0$, pour tout nombre réel $r \geqslant 0$.

(ii) *(sur 1,5 point)*

Par un calcul direct et facile on obtient la dérivée $f^{'}(x) = -2xe^{-x^2}\cos(e^{2x^2}) - 4xe^{2x^2}e^{-x^2}\sin(e^{2x^2})$, donc

$$f^{'}(x) = -2x\left(e^{-x^2}\cos(e^{2x^2}) + 2e^{x^2}\sin(e^{2x^2})\right).$$

En définissant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la suite des réels $x_k = \sqrt{Log(2k\pi + \frac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}}}$ on a $\lim\limits_{k\to+\infty} |f^{'}(x_k)| = +\infty$. Ainsi, sachant que $\lim\limits_{k\to+\infty} |x_k| = +\infty$, il est impossible d'avoir $\lim\limits_{|x|\to+\infty} |x^\alpha f^{'}(x)| = 0$. Par conséquent, la dérivée $f^{'}$ n'est pas à décroissance rapide.

(iii) *(sur 1 point)*

Un élément de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est une fonction (de classe $\mathcal{C}^\infty$) à décroissance rapide dont toutes les dérivées (de tout ordre) sont aussi à décroissance rapide. Donc, f n'appartient pas à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ puisque (déjà) sa première dérivée n'est pas à décroissance rapide.

(iv) *(sur 1 point)*

Une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$ est une application linéaire et continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ (autrement dit, une forme linéaire et continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$: un élément du dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$).

Exercice 3 (4 points)

(i) Montrer que l'application $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = e^{-x}$, n'est pas une contraction sur $\mathbb{R}$.
(ii) Montrer que $F^2(x) = e^{-e^{-x}}$ est une contraction sur $\mathbb{R}$.

Solution :

(i) *(sur 2 points)*

Supposons que $F(x)$ est une contraction sur $\mathbb{R}$. Donc, il existe un réel $L \in]0,\, 1[$ tel que $|F(x)-F(y)| \leqslant L|x-y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Ainsi, en particulier pour $x \neq y$ quelconques dans $\mathbb{R}$, on a

$$\frac{|F(x) - F(y)|}{|x-y|} \leqslant L$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\lim\limits_{y \to x} \frac{|F(x)-F(y)|}{|x-y|} \leqslant L < 1$. La fonction $F(x) = e^{-x}$ étant dérivable par tout sur $\mathbb{R}$, ceci implique que $|F^{'}(x)| = e^{-x} < 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Ce qui est absurde, puisque pour $x < 0$ on a $e^{-x} > 1$.

(ii) *(sur 2 points)*

On a

$$\left| \frac{d}{dx} e^{-e^{-x}} \right| = \left| e^{(-x-e^{-x})} \right| \leqslant e^{-1} < 1.$$

Ainsi, en utilisant le théorème des accroissements finis ; on en déduit que $F^2(x) = e^{-e^{-x}}$ est une contraction sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (4 points)
Soient (X, d) un espace métrique complet, F_1 et F_2 deux applications contractions de X vers X telles que : $d(F_1(x), F_1(y)) \leqslant \alpha\, d(x,y),\quad d(F_2(x), F_2(y)) \leqslant \alpha\, d(x,y)$, et $d(F_1(x), F_2(x)) \leqslant \beta,\ \forall x, y \in X$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$.
(i) Donner une condition suffisante sur α, pour que chaque application F_1 et F_2 possède un point fixe unique.
(ii) Si x_1 et x_2 sont les points fixes respectivement de F_1 et F_2, montrer que $d(x_1, x_2) \leqslant \dfrac{\beta}{1-\alpha}$.

Solution :

(i) *(sur 1,5 point)*

D'après le théorème du point fixe de Banach (principe de la contraction), il suffit que $\alpha \in]0,\, 1[$.

(ii) *(sur 2,5 points)*

$$d(x_1, x_2) = d(F_1(x_1), F_2(x_2)) \leqslant d(F_1(x_1), F_2(x_1)) + d(F_2(x_1), F_2(x_2)) \leqslant \beta + \alpha d(x_1, x_2).$$

Ce qui implique que $(1-\alpha)d(x_1, x_2) \leqslant \beta$. D'où, $d(x_1, x_2) \leqslant \dfrac{\beta}{1-\alpha}$.