تصحيح امتحان ميكانيك الكم

التمرين الأول :

1/ الكثافة الاحتمالية المستقرة : $D = |\psi(x,t)|^2 = |C|^2 e^{-\frac{2amx^2}{\hbar}}$ 0,25

بما أن كثافة الاحتمال لا تتعلق بالزمن فإن $\psi(x,t)$ تصف حالة مستقرة . 0,25

2/ حساب C : $(\psi,\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t)\, \psi(x,t)\, dx = 1$ 0,5

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |C|^2 e^{-\frac{2amx^2}{\hbar}} dx = |C|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$$

$$= |C|^2 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = |C|^2 \sqrt{\frac{\hbar\pi}{2am}}$$

$$\Rightarrow |C|^2 \sqrt{\frac{\hbar\pi}{2am}} = 1 \Rightarrow C = \left(\frac{2am}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$$ 0,5

3/ احتمال الحصول على الجسيم في المنطقة $x > 0$:

$$P = \int_0^{+\infty} \psi^*(x,t)\, \psi(x,t)\, dx = |C|^2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2am}{\hbar}x^2} dx$$ 0,5

بما أن $e^{-\frac{2amx^2}{\hbar}}$ دالة زوجية فإن :

$$P = \frac{|C|^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2am}{\hbar}x^2} dx = \frac{|C|^2}{2} \sqrt{\frac{\hbar\pi}{2am}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[|C|^2 \sqrt{\frac{\hbar\pi}{2am}}\right] = 1/2$$ 0,5

4/ الطاقة الكلية :

معادلة شرودنغر تعطي :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \hat{H}\, \psi(x,t)$$ 0,25

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left(C e^{-a\left[\frac{mx^2}{\hbar} + it\right]}\right)$$

$$= i\hbar \left[C(-ia)\, e^{-a\left[\frac{mx^2}{\hbar} + it\right]}\right]$$

$$\langle x^2 \rangle = |C|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-\alpha x^2} dx$$

$$= -|C|^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = -|C|^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$= -|C|^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\sqrt{\pi}\, \alpha^{-1/2}\right]$$

$$= -|C|^2 \sqrt{\pi} \left[-\frac{1}{2} \alpha^{-3/2}\right] = \frac{|C|^2}{2} \sqrt{\pi} \times \left(\frac{2am}{\hbar}\right)^{-3/2}$$

$$= \frac{|C|^2}{2} \times \sqrt{\pi} \times \left(\frac{\hbar}{2am}\right)^{1/2} \times \left(\frac{\hbar}{2am}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{\hbar}{2am}\right) \underbrace{\left[|C|^2 \times \sqrt{\frac{\hbar \pi}{2am}}\right]}_{1}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{4am} \quad \text{oif}$$

c) $$\langle \hat{p}_x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{p}_x \psi \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi \, dx \quad \text{oif}$$

$$= |C|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hbar}{i} e^{-\frac{am x^2}{\hbar}} \frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{am x^2}{\hbar}} dx$$

$$= |C|^2 \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{2am}{\hbar} x\right) e^{-\frac{2am x^2}{\hbar}} dx$$

$$= |C|^2 \frac{\hbar}{i} \left(-\frac{2am}{\hbar}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} x \, e^{-\frac{2am x^2}{\hbar}} dx$$

$$= 0 \quad \text{oif}$$

d) $\langle \hat{P}_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{P}_x^2 \psi \, dx$ (0.5)

$$= |c|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{amx^2}{\hbar}} (-\hbar^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-\frac{amx^2}{\hbar}} \, dx$$

$$= -\hbar^2 |c|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{amx^2}{\hbar}} \left[-\frac{2am}{\hbar} + \frac{4a^2m^2x^2}{\hbar^2} \right] e^{-\frac{amx^2}{\hbar}} \, dx$$

$$= -\hbar^2 |c|^2 \left[-\frac{2am}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2amx^2}{\hbar}} \, dx + \frac{4a^2m^2}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{2amx^2}{\hbar}} \, dx \right]$$

$$= -\hbar^2 \left[-\frac{2am}{\hbar} \underbrace{|c|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2amx^2}{\hbar}} \, dx}_{1} + \frac{4a^2m^2}{\hbar^2} \underbrace{|c|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{2amx^2}{\hbar}} \, dx}_{\langle x^2 \rangle} \right]$$

$$= -\hbar^2 \left[-\frac{2am}{\hbar} + \frac{4a^2m^2}{\hbar^2} \times \frac{\hbar}{4am} \right]$$

$$= 2am\hbar - \hbar am = \hbar am$$

$$\boxed{\langle \hat{P}_x^2 \rangle = \hbar am}$$ (0.5)

$\sigma_x \times \sigma_{P_x} = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \sqrt{\langle P_x^2 \rangle - \langle P_x \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{4am}} \sqrt{\hbar am} = \frac{\hbar}{2}$ (0.1) (1) (1) (0.1) 16

-4-

تمرين الثاني :

1. علاقتي التعامد و التجانس :

$$(\psi_1,\psi_1)=\int_0^a \psi_1^*(x)\,\psi_1(x)\,dx = \frac{2}{a}\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)dx$$

$$=\frac{2}{a}\int_0^a \frac{1-\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)}{2}\,dx$$

$$=\frac{1}{a}\left[x\Big|_0^a-\frac{a}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\Big|_0^a\right]$$

$$=\frac{1}{a}\times a = 1 \quad 01$$

بنفس الطريقة نجد أن :

$$(\psi_2,\psi_2)=1 \quad 01$$

$$(\psi_1,\psi_2)=\int_0^a \psi_1^*(x)\,\psi_2(x)\,dx = \frac{2}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)dx$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^a\left[\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{a}x\right)\right]dx$$

$$=\frac{1}{a}\left[\frac{a}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\Big|_0^a-\frac{a}{3\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right)\Big|_0^a\right]$$

$$=0 \quad 01$$

$$(\psi_1,\psi_2)=(\psi_2,\psi_1)=0 \quad 01$$

إذن علاقتي التعامد والتجانس محققتان أي :

$$(\psi_i,\psi_j)=\delta_{ij}$$

2- حساب الثابت C :

$$(\psi,\psi)=|C|^2(\psi_1+\psi_2,\psi_1+\psi_2)$$

$$=|C|^2\left[\underbrace{(\psi_1,\psi_1)}_{1}+\underbrace{(\psi_1,\psi_2)}_{0}+\underbrace{(\psi_2,\psi_1)}_{0}+\underbrace{(\psi_2,\psi_2)}_{1}\right]$$

$$=2|C|^2=1 \Longrightarrow \boxed{C=\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad 01$$

قسم الفيزياء	إمتحان مقياس	السنة الثانية
كلية العلوم الدقيقة	ميكانيك الكم	ليسانس فيزياء
جامعة الوادي	المدة: ساعة و نصف	2018-2017

التمرين الأول:(11 نقطة)

الدالة الموجية التي تصف حالة جسم كتلته m عند اللحظة t هي

$$\psi(x,t) = Ce^{-a[(mx^2/\hbar)+it]}$$

حيث C و a ثوابت حقيقية موجبة.

1. بين أن الدالة الموجية $\psi(x,t)$ تصف حالة مستقرة.
2. أحسب ثابت التنظيم C.
3. ما هو إحتمال الحصول على الجسم في المنطقة $0 < x$.
4. ماهي طاقة الكمون التي تحقق من أجلها الدالة الموجية $\psi(x,t)$ معادلة شرودينغر.
5. أحسب القيم المتوسطة لكل من x، x^2، p_x و p_x^2.
6. أحسب σ_x و σ_{p_x}، ثم تحقق من مبدأ الإرتياب.

التمرين الثاني:(9 نقاط)

الدوال الذاتية لمؤثر طاقة جسيم حر داخل بئر كموني لا نهائي عرضه a هي من الشكل:

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

نفترض أن الجسيم في اللحظة $t = 0$ كانت الدالة التي تصف حركته هي

$$\psi(x,0) = C\left(\phi_1(x) + \phi_2(x)\right)$$

1. أثبت أن $\phi_1(x)$ و $\phi_2(x)$ تحققان علاقتي التعامد و التجانس.
2. أحسب C حتى تكون $\psi(x,0)$ منظمة.
3. ماهو إحتمال وجود الجسيم بالطاقة E_1 و ما هو إحتمال وجوده بالطاقة E_2.
4. أحسب القيمة المتوسطة لمؤثر الطاقة $\langle H\rangle$.
5. قارن القيمة المتوسطة لمؤثر الطاقة H بـ E_1 و E_2.

ملاحظة: للتبسيط إستعمل و بطريقة مباشرة النتيجة المتوصل إليها في السؤال الأول من التمرين الثاني

بالتوفيق