مقياس: رياضيات 1	جامعة الشهيد محمد لخضر - الوادي	قسم الفيزياء
السّنة الجامعية:2018/2017	كلية العلوم الدقيقة	السّنة الأولى علوم المادة

2018-01-15 امتحان الدورة العادية للسداسي الأول المدّة: ساعة و نصف

التمرين الأول: (04 نقاط)

لتكن A و B مجموعتان جزئيتان من مجموعة E.

1) أثبت صحة التكافؤ التالي: $(A\cap B=\varnothing)\Leftrightarrow(A\subset\overline{B})$ ، ($\overline{B}$ متممة B بالنسبة إلى E).

2) إذا علمت أن $E=\{1;2;3;4;5\}$ و $A=\{1;2\}$، فعين مثالا عن مجموعة B من E تُحقق التكافؤ السابق مع التعليل.

التمرين الثاني:(09 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرّفة على المجال $I=]-1\ ,\ 1[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$

1) احسب نهاية الدالة f عند كل طرف من طرفي المجال I.

2) ادرس إتجاه تغير الدالة f على المجال I.

3)- بيّن أنّ الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} على I يُطلب تعيين مجموعة تعريفها ،(لا يُطلب تعيين عبارة $(f^{-1})'(x)$).

- هل يمكن حساب $(f^{-1})'(1)$ (مشتق f^{-1} عند 1) ؟ ، علّل.

4) حل في المجال I المعادلة $f\,[arctg(x)]=1$ ذات المجهول x.

التمرين الثالث: (07 نقاط)

Δ عملية داخلية في المجموعة $\mathbb{R}$ معرّفة بالشكل التالي: $x\ \Delta\ y\ =2xy+4\ (x+y)\ +\ 6$

1) أثبت أنّ $(\mathbb{R}-\{-2\}\ ,\ \Delta)$ زمرة تبديلية.

2) نعتبر التطبيق g المعرّف من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=x\ \Delta\ x$.

- عين قيم x من $\mathbb{R}$ بحيث يكون $g(x)=0$ ، وهل التطبيق g متباين ؟ ، علّل.

انتهى و بالتوفيق

... المادة   السداسي الأول   السنة الجامعية: 18/17

تصحيح اختبار الرياضيات 1

التمرين الأول:

1) إثبات أن: $A\cap B=\phi \iff A\subset\overline{B}$

(".." $\Rightarrow$ "..")

01 $\forall x\in E,\ x\in A \Rightarrow x\notin B$, (لأن $A\cap B=\phi$)

0,5 $\Rightarrow x\in\overline{B}$

ومنه $A\subset\overline{B}$

(".." $\Leftarrow$ "..") نستعمل الخلف: نفرض أن $A\cap B\neq\phi$

0,5 أي يوجد على الأقل عنصر x من $A\cap B$

01 ومنه $x\in A \wedge x\in B$ إذن $x\in\overline{B} \wedge x\in B$

(لأن $A\subset\overline{B}$)

وهذا تناقض. إذن $A\cap B=\phi$.

0,5 2) نختار مثلا $B=\{3;4\}$ ومنه $\overline{B}=\{1;2;5\}$

0,5 وبالتالي $A\cap B=\phi$ و $A\subset\overline{B}$

فالتكافؤ صحيح.

التمرين الثاني:

1) النهايات:

01 $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)=+\infty$, $\begin{pmatrix}\text{البسط} \to -1\\ \text{المقام} \to 0^-\end{pmatrix}$

01 $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)=-\infty$, $\begin{pmatrix}\text{البسط} \to 1\\ \text{المقام} \to 0^-\end{pmatrix}$

2) إتجاه التغير:

- المشتق:

0,5 $\forall x\in]-1;1[: f'(x)=\dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$

- الإشارة:

0,5 $\forall x\in]-1;1[: f'(x)\leq 0$

0,5 ومنه f متناقصة على المجال $]-1;1[$.

3) إثبات أن f تقبل دالة عكسية على I:

01 بما أن f مستمرة ومتناقصة تماما على I فهي تقبل دالة عكسية f^{-1}

مجموعة تعريف f^{-1}:

01 $D_{f^{-1}} = f(]-1,1[) =]\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) ; \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)[=]-\infty, +\infty[$

حساب $(f^{-1})'(1)$:

0,5 نفرض أن $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(x)}$

حيث $f(x)=1$ ومنه $\frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}=1$

0,5 فينتج $x=0$

0,5 ولكن $f'(0)=0$

0,5 ممّا يعني أنّه لا يمكن حساب $(f^{-1})'(1)$.

4) حل المعادلة $f(\text{arctg}\,x)=1$:

بما أن $-1<x<1$ فإن $-\frac{\pi}{4} < \text{arctg}\,x < \frac{\pi}{4}$

ولدينا : $]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[\subset I$.

01 $\forall x\in I : f(\text{arctg}\,x)=1 \Leftrightarrow (\text{arctg}\,x)^3=0$

$\Leftrightarrow \text{arctg}\,x=0$

0,5 $\Leftrightarrow x=0$

فمجموعة الحلول : $S=\{0\}$.

التمرين الثالث :

1) إثبات أن $(\mathbb{R}-\{-2\},\Delta)$ زمرة تبديلية :

0,5 - Δ تبديلية : $\forall x,y\in\mathbb{R}-\{-2\} : x\Delta y = y\Delta x$

وبالفعل : $x\Delta y = 2xy+4(x+y)+6$

$= 2yx+4(y+x)+6$

0,5 $= y\Delta x$

0,5 - Δ تجميعية : $\forall x,y,z\in\mathbb{R}-\{-2\} : (x\Delta y)\Delta z = x\Delta(y\Delta z)$

لدينا من جهة : $(x\Delta y)\Delta z = [2xy+4(x+y)+6]\Delta z$

$= 2[2xy+4(x+y)+6]z+4[2xy+4(x+y)+6+z]+6$

0,5 $= 4xyz+8xz+8yz+8xy+16z+16x+16y+30 \cdots (1)$

ومن جهة أخرى : $x\Delta(y\Delta z) = x\Delta[2yz+4(y+z)+6]$

$= 2x[2yz+4(y+z)+6]+4[x+2yz+4(y+z)+6]+6$

0,5 $= 4xyz+8xy+8xz+8yz+16x+16y+16z+30 \cdots (2)$

(ب) و(ج) ينتج أن $(x\Delta y)\Delta z = x\Delta(y\Delta z)$ ومنه Δ تجميعية.

- العنصر الحيادي: نبحث عن e العنصر الحيادي، فلدينا:

0,5 $\forall x\in\mathbb{R}-\{-2\} : x\,\Delta\, e = x$

أي $\forall x\in\mathbb{R}-\{-2\} : 2xe+4(x+e)+6 = x$

ومنه $\forall x\in\mathbb{R}-\{-2\} : e = \frac{-3x-6}{2x+4} = -\frac{3}{2}$

0,5 فالعنصر الحيادي هو $e=-\frac{3}{2}$

- العنصر النظير: ليكن x من $\mathbb{R}-\{-2\}$ ولنفرض x' نظيره بالنسبة

0,5 إلى Δ، فيتحقق: $x\,\Delta\, x' = -\frac{3}{2}$

أي $2xx'+4(x+x')+6 = -\frac{3}{2}$

0,5 وبالتالي: $x' = \frac{-4x-\frac{15}{2}}{2x+4} = \frac{-8x-15}{4x+8}$

فلكل عنصر من $\mathbb{R}-\{-2\}$ نظير بالنسبة إلى Δ.

إذن: $(\mathbb{R}-\{-2\}, \Delta)$ زمرة تبديلية.

2) لدينا: $g(x) = x\,\Delta\, x = 2x^2+8x+6$

- تعيين x حيث $g(x)=0$:

0,5 $g(x)=0 \iff 2x^2+8x+6=0$

0,5 $\iff x=-3 \;\vee\; x=-1$

0,5 - g ليس متباين

01 لأن للسابقتين (-3) و (-1) مثلا نفس الصورة (0).