جامعة الشهيد حمه لخضر - الوادي	كلية العلوم الدقيقة	قسم الفيزياء

المقياس: الميكانيكا التحليلية	المستوى: السنة الثانية
المـــدة: ساعة و نصف	الدورة: العادية (2018/17)

امتحان في مقياس الميكانيكا التحليلية

التمرين الأول:(4ن)

نعتبر التحويل الآتي : $P = \frac{\sqrt{mk}}{q}$ $\quad\quad$ $Q = \frac{p.q^2}{\sqrt{mk}}$

احسب $\{Q, P\}_{q,p}$ ؟ ماذا تستنتج؟

* يعطى: $\{f, g\}_{x,y} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}$

التمرين الثاني:(5ن)

التابع الهاملتوني في بعد واحد لنظام ميكانيكي يعطى بـــ : $H(q, p, t) = h(q, p) + \alpha[h(q, p)]^2$

حيث ان التابع $h(q\,, p)$ يعرف بـــ: $h(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$ .q إحداثية معممة وp العزم المرافق لها؛ α و ω ثوابت حقيقية موجبة. و يتم اعطاء الشروط الابتدائية الاتية :

$$q(0) = q_0 \quad ; \quad p(0) = p_0 \quad ; \quad h_0 = h(q_0\,, p_0)$$

أي من العبارات الاتية صحيحة او خاطئة مع إعطاء تبرير لإجابتك بشكل قصير جدا.

أ) H تكامل أولي.

ب) $h = h(q, p)$ تكامل أولي.

ج) $\dot{p} = -(1 + 2\alpha h)q$

د) $\dot{q} = (1 + 2\alpha h)p$

ه) $\ddot{q} = -\omega^2(1 + 2\alpha h_0)^2 q$

اقلب الصفحة

التمرين الثالث:(5ن)

نعتبر لدينا هزاز توافقي يهتز في بعد واحد خاضع لقوة احتكاك يعطى تابع هاملتون لهذا النظام كالآتي :

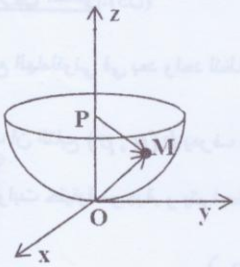
$$H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \gamma\omega q p$$

حيث m , ω ثوابت حقيقية موجبة و يمثلان الكتلة و النبض الطبيعي على الترتيب. γ ثابت حقيقي يمثل معامل التخامد .

1. استخلص معادلات هاملتون للحركة ؟
2. أثبت أن معادلة الحركة في الأخير تؤول إلى الشكل التالي : $\ddot{q} + \omega^2(1-\gamma^2)q = 0$.
3. ماهي قيم γ حتى تكون الحركة اهتزازية مستقرة حول وضع التوازن $q = 0$ ؟

التمرين الرابع:(6ن)

تنزلق نقطة مادية M كتلتها (m) بدون احتكاك ومقيدة على سطح نصف كرة (نصف قطرها R) من الداخل حيث تخضع النقطة المادية M لقوة الجاذبية (أنظر الشكل المقابل).



معطيات :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = R\vec{k} \\ \overrightarrow{PM} = R\vec{u}_r \end{cases}$$

1. حدد التابع اللاغرانجي لنقطة مادية M بدلالة الاحداثيات المعممة (θ, φ) ؟
2. حدد معادلات الحركة ؟
3. ماذا يمكننا القول عن الإحداثية φ و P_φ ؟

انتهى

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الشهيد حمه لخضر . الوادي

كليـة : .... قسم .... الحل النموذجي لامتحان الميكانيك التحليلية
الإسم واللقب : ....
مقياس: .... الرقم: .... الدفعة : .... الفوج: ....
التاريخ: .... سنة ثانية فيزياء
رقم التسجيل: 2017 / 2018

الرقم السري:

يمنــع علــى الطــالب وضــع أي إشــارة على ورقــة الإمتحــان

الرقم السري

العلامة

/20

ت ① (04 نقاط)

لدينا:

$$\begin{cases} Q = \dfrac{p q^2}{\sqrt{km}} \\ P = \dfrac{\sqrt{km}}{q} \end{cases}$$

حساب $\{Q, P\}_{q,p}$

$$\{Q, P\}_{q,p} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} \quad 0{,}5$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{2p\cdot q}{\sqrt{km}} \quad 0{,}5 \qquad \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{q^2}{\sqrt{km}} \quad 0{,}5$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = 0 \quad 0{,}5 \qquad \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{-\sqrt{km}}{q^2} \quad 0{,}5$$

$$\{Q, P\}_{q,p} = \frac{2pq}{\sqrt{km}}\cdot 0 - \left(\frac{q^2}{\sqrt{km}}\right)\left(-\frac{\sqrt{km}}{q^2}\right) = -1(-1) = 1 \quad 0{,}5$$

فنستنتج أن التحويلة قانونية
1

تمرين 02 : 05 نقاط

$$H(q,p) = h(q,p) + \alpha\left(h(q,p)\right)^2$$

أ) H تكامل أولي صحيح لأنه $\dot H = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$

ب) $h=h(q,p)$ تكامل أولي صحيح لأنه من (أ)

$$\dot H = \frac{dH}{dt} = 0 \ , \ \frac{dH}{dt} = \dot h + 2\alpha h \dot h$$

$$= \dot h\left(1 + 2\alpha h\right) = 0$$

مادام $1 + 2\alpha h \neq 0$ ⇐ $\boxed{\dot h = 0}$

$$\Rightarrow \boxed{h = Const}$$

ج) $\dot p = -(1+2\alpha h)q$ خطأ لأنه من معادلات هاملتون للحركة

$$\dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\omega^2(1+2\alpha h)q$$

د) $\dot q = (1+2\alpha h)p$ صحيحة لأنه من معادلات هاملتون للحركة

$$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p} = (1+2\alpha h)p$$

هـ) $\ddot q = -\omega^2(1+2\alpha h)^2 q$ صحيحة لأنه من (ج) و (د) و (ب)

$$\ddot q = \frac{d}{dt}(\dot q) = (1+2\alpha h)\dot p + (2\alpha \dot h)p$$

2

$$\ddot q = (1+2\alpha h)\left[-\omega^2(1+2\alpha h)\right] q$$

$$= -\omega^2 (1+2\alpha h)^2 q \quad , \quad h = const = h_0$$

$$\boxed{\ddot q = -\omega^2 (1+2\alpha h_0)^2 q}$$ 0,25

تمرين (03) (05 نقاط)

لدينا:

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 + \gamma\omega q p$$

1) معادلات الحركة

$$\begin{cases} \dot p = -\dfrac{\partial H}{\partial q} & \dots (1) \quad 0,25 \\ \dot q = \dfrac{\partial H}{\partial p} & \dots (2) \quad 0,25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot p = -\left[m\omega^2 q + \gamma\omega p \right] & \dots (1) \quad 0,75 \\ \dot q = \dfrac{1}{m} p + \gamma\omega q & \dots (2) \quad 0,75 \end{cases}$$

2) نشتق المعادلة (2) ونعوض ب $\dot p$ ، $\dot q$ من (1) ، (2)

$$\ddot q = \frac{1}{m}\dot p + \gamma\omega \dot q$$

$$\ddot q = \frac{1}{m}\left(-m\omega^2 q - \gamma\omega p\right) + \gamma\omega\left(\frac{p}{m} + \gamma\omega q\right)$$

$$= -\omega^2 q - \underbrace{\frac{\gamma\omega}{m}p + \frac{\gamma\omega}{m}p}_{0} + \gamma^2\omega^2 q$$

$$\ddot q = -\omega^2 q + \gamma^2\omega^2 q = -(\omega^2 - \gamma^2\omega^2) q \quad 01$$

$$= -\omega^2(1-\gamma^2) q$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot q + \omega^2(1-\gamma^2) q = 0}$$

وهو المطلوب.

03

(03) تحديد مجال γ حتى تكون الحركة اهتزازية مستقرة حول وضع التوازن $\varphi = 0$.

أي الشرط الرياضي هو $\omega^2(1-\gamma^2) > 0$

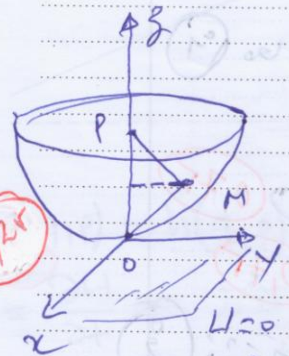
$$\Rightarrow (1-\gamma^2) > 0 \Rightarrow \gamma \in]-1 \quad 1[$$

(02)

ت 04) 06 نقاط

لدينا

1° تحديد تابع لاغرانج L



0,25

$U = 0$

$$L = T - U \quad (0{,}25)$$

$$T = \frac{1}{2} m V_M^2 \qquad \vec{V}_M = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

لدينا من المعطيات

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$$

$$= R\vec{k} + R\vec{U}_r$$

$$\Rightarrow \vec{V}_M = \vec{0} + R\dot{\vec{U}}_r = R\left(\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{U}_\varphi\right)$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m R^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) \quad (1)$$

$$U = mg\Delta h = mg z_M$$

لدينا

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{k} + R\vec{U}_r = \begin{pmatrix} R\sin\theta\cos\varphi + 0 \\ R\sin\theta\sin\varphi + 0 \\ R\cos\theta + R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = mgR(1+\cos\theta) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \boxed{L(\theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m R^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) - mgR(1+\cos\theta)}$$

(0,5) (4)

2) تحديد معادلات الحركة:

$j = 1, \quad q_1 = \theta \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = \text{0,25}\; mR^2\dot\theta \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = mR^2\ddot\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = \text{0,25}\; mR^2\dot\varphi^2 \sin\theta\cos\theta + mgR\sin\theta \end{cases}$$

$$\cancel{m}R^2\ddot\theta = \cancel{m}R^2\left(\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta + \frac{g}{R}\sin\theta\right)$$

$$\ddot\theta = \dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta + \frac{g}{R}\sin\theta \quad \text{0,25}$$

$j = 2 \quad q_2 = \varphi \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$

$$\text{0,25}\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mR^2\sin^2\theta\,\dot\varphi \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{0,25} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mR^2\sin^2\theta\,\dot\varphi = Const = P_\varphi \quad \text{0,25}$$

ومنه يمكننا القول أن .

φ إحداثية مستترة 0,25

P_φ العزم المرافق لـ φ هو ثابت زمني

0,25