قسم الفيزياء
كلية العلوم الدقيقة
جامعة الوادي

إمتحان البرمجة 1
المدة: ساعة و نصف

السنة الأولى
ماستر فيزياء
2018-2017

التمرين الأول:(14 نقطة)
معادلة الحركة لجسم كتلته $m = 2kg$ تعطى بـ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -5x^2$$

1. أعطي خوارزمية أولر- كرومر ثم خوارزمية فرلات لحل هذه المعادلة التفاضلية.
2. عين الخطأ المرفق بكل خوارزمية من أجل خطوة واحدة.
3. إذا كانت السرعة $v_x = -0.2m/s$ و الموضع $x = 0.5m$ عند اللحظة $t = 0s$

(ا) أحسب الموضع و الخطأ فيه بين اللحظتين $t = 0s$ و $t = 1s$ من أجل $N = 5$ بإستعمال خوارزمية أولر- كرومر ثم استنتج الخطأ الكلي.

(ب) أعد نفس السؤال بإستعمال خوارزمية فرلات.

(ج) من خلال حساب الخطأ الكلي ماذا تلاحظ؟.

(د) أكتب شفرة فورترون لكل خوارزمية تمكنك من الحصول على الموضع و الخطأ فيه و الطاقة الكلية.

التمرين الثاني:(6نقاط)
نأخذ التكامل التالي

$$I = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} f(x)\,dx \;\; ; \;\; f(x) = sin(x).$$

1. أحسب القيمة العددية لهذا التكامل بإستعمال خوارزمية التقريب المستطيلي من أجل $N = 4$.
2. أحسب الخطأ المرتكب في حساب هذا التكامل.

بـالتوفيق

- تصحيح امتحان البرمجة 1 -

التمرين الأول :

1- * خوارزمية أويلر-كرومر :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}x^2 \quad ; \quad k = 5 .$$

$$\frac{v_x(t_n+\Delta t) - v_x(t_n)}{\Delta t} = -\frac{k}{m}x^2(t_n) \Rightarrow \begin{cases} v_x(t_n+\Delta t) = v_x(t_n) - \Delta t \frac{k}{m}x^2(t_n) \\ x(t_n+\Delta t) = x(t_n) + \Delta t\, v_x(t_n+\Delta t) \end{cases} \quad 02$$

$$\frac{x(t_n+\Delta t) - x(t_n)}{\Delta t} = v_x(t_n+\Delta t)$$

* خوارزمية فيرلي :

$$x(t_n+\Delta t) = 2x(t_n) - x(t_n-\Delta t) + (\Delta t)^2 \frac{d^2x}{dt^2}\Big/_{t=t_n}$$

$$= 2x(t_n) - x(t_n-\Delta t) - \frac{k}{m}x^2(t_n)\cdot(\Delta t)^2 \quad 02$$

2-

$$x(t_n+\Delta t) = x(t_n) + \frac{dx}{dt}\Big|_{t_n}\Delta t + \frac{1}{2!}\frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t_n}(\Delta t)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3x}{dt^3}\Big|_{t_n}(\Delta t)^3 + \frac{1}{4!}\frac{d^4x}{dt^4}\Big|_{t_n}(\Delta t)^4 + \dots$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = -\frac{k}{m}\frac{d}{dt}\left(x^2(t)\right) = -\frac{2k}{m}v_x(t)\cdot x(t)$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right) = -\frac{2k}{m}\left[\frac{dv_x(t)}{dt}\cdot x(t) + v_x(t)\frac{dx(t)}{dt}\right]$$

$$= +2\frac{k^2}{m^2}x^3(t) - \frac{2k}{m}v_x^2(t) .$$

$$x(t_n+\Delta t) = x(t_n) + v_x(t_n)\cdot\Delta t + \frac{1}{2}\left(-\frac{k}{m}x^2(t_n)\right)(\Delta t)^2 + \frac{1}{6}\frac{2k}{m}v_x(t_n)x(t_n)$$

$$+ \frac{1}{24}\left[\frac{2k^2}{m^2}x^3(t_n) - \frac{2k}{m}v_x^2(t_n)\right](\Delta t)^4 + \dots$$

$$= x(t_n) + v_x(t_n)\cdot\Delta t - \frac{k}{2m}x^2(t_n)\cdot(\Delta t)^2 - \frac{k}{3m}v_x(t_n)x(t_n)$$

$$+ \frac{k^2}{12m^2}x^3(t_n)(\Delta t)^4 - \frac{k}{12m}v_x^2(t_n)(\Delta t)^4 - \dots$$

ذ

رتبة أولر-كروسر:

$$Error = x(t_n+\Delta t) - x_{Nu}(t_n+\Delta t)$$

$$= x(t_n+\Delta t) - x(t_n) - \Delta t\left(v_x(t_n) - \Delta t \frac{k}{m} x^2(t_n)\right)$$

$$= x(t_n)+\Delta t) - x(t_n) - \Delta t\, v_x(t_n) + (\Delta t)^2 \frac{k}{m} x^2(t_n)$$

$$= \frac{k}{2m} x^2(t_n)\cdot(\Delta t)^2 - \frac{k}{3m} v_x(t_n)\, x(t_n)\cdot(\Delta t)^3$$

$$+ \frac{k^2}{12m^2} x^3(t_n)\,(\Delta t)^4 - \frac{k}{12m} v_x^2(t_n)\cdot(\Delta t)^4 + \dots$$ 02

* خوارزمية فرلت:

$$Error = x(t_n+\Delta t) - x_{Nu}(t_n+\Delta t)$$

$$= \frac{k^2}{12m^2} x^3(t_n)\cdot(\Delta t)^4 - \frac{k}{12m} v_x^2(t_n)\cdot(\Delta t)^4 \dots$$ 02

3 - حساب الموضع والخطأ فيه:

الخطأ الذي سنقوم بحسابه في المسألة نحصل عليه من خلال قيمة التقريبية التي سنعتبرها حتى الرتبة 4 في (Δt).

لدينا:

$$\Delta t = \frac{t(N)-t(0)}{N} = 0{,}25 < x(0) = 0{,}5m \quad ; v_x(0) = -0{,}2\ m/s$$

* أولر-كروسر:

$n=0$ $v_x(1) = v_x(0) - \Delta t \frac{k}{m} x^2(0) = -0{,}325$

$x(1) = x(0) + \Delta t\, v_x(1) = 0{,}435$

$Error = 1{,}325 \times 10^{-2}$

$n=1$ $v_x(2) = v_x(1) - \Delta t \frac{k}{m} x^2(1) = -0{,}419$

$x(2) = x(1) + \Delta t\, v_x(2) = 0{,}351$ 01

$Error = 1.043 \times 10^{-2}$

$n=2$ $v_x(3) = v_x(2) - \Delta t \frac{k}{m} x^2(2) = -0{,}481$

$x(3) = x(2) + \Delta t\, v_x(3) = 0{,}254$

$Error = 7{,}122 \times 10^{-3}$

$n=3$ $v_x(4) = -0{,}513$

$x(4) = 0{,}152$

$Error = 4{,}001 \times 10^{-3}$

$n = 4 \quad v_x(5) = -0,525$

$x(5) = 4,703 \times 10^{-2}$

$Error = 1,592 \times 10^{-3}$

$terror = 3,641 \times 10^{-2}$.

* طريقة أويلر:

في خوارزمية طريقة أويلر نحسب $x(1)$ بالاعتماد على خوارزمية أويلر، وكذلك الخطأ فيها:

$x(1) = x(0) + v_x(0) \times \Delta t = 0,460$

$Error = -1,174 \times 10^{-2}$

$x(2) = 0,398$

$Error = 8,111 \times 10^{-5}$

$x(3) = 0,327$

$Error = 5,287 \times 10^{-5}$

$x(4) = 0,234$

$Error = 2,776 \times 10^{-5}$

$x(5) = 0,141$

$Error = 1,072 \times 10^{-5}$

$terror = -1,157 \times 10^{-2}$.

نلاحظ أن القيمة المطلقة للخطأ الكلي في خوارزمية أويلر كبر منها في خوارزمية طريقة كروس.

```
program code_Euler_Cromer_exam
implicit none
integer i,N
parameter (N=5)
double precision k,m,dt,x(0:N),vx(0:N),
&E(0:N),t(0:N),error(0:N),terror
k=5.0d0
m=2.0d0
dt=0.2d0
x(0)=0.5d0
vx(0)=-0.2d0
E(0)=0.5d0*m*vx(0)**2+k/3.0d0*x(0)*x(0)*x(0)
t(0)=0.0d0
terror=0.0d0
do i=0,N-1
vx(i+1)=vx(i)-dt*k/m*x(i)*x(i)
x(i+1)=x(i)+dt*vx(i+1)
error(i+1)=0.5d0*k/m*dt*dt*x(i)*x(i)
error(i+1)=error(i+1)-k/(3*m)*dt*dt*dt*x(i)*vx(i)
error(i+1)=error(i+1)+k*k/(12*m*m)*x(i)*x(i)*x(i)*dt*dt*dt*dt
error(i+1)=error(i+1)-k/(12*m)*vx(i)*vx(i)*dt*dt*dt*dt
terror=terror+error(i+1)
E(i+1)=0.5d0*m*vx(i+1)**2+k/3.0d0*x(i+1)*x(i+1)*x(i+1)
t(i+1)=(i+1)*dt
write(33,*)  i+1,vx(i+1),x(i+1),error(i+1),t(i+1),E(i+1)
enddo

write(*,*) terror
end program
```

02

```
 Program code_Verlet_exam
 implicit none
integer i,N
parameter (N=6)
double precision k,m,dt,x(0:N),vx(0:N-1),
&E(0:N),t(0:N),error(0:N),terror
k=5.0d0
m=2.0d0
dt=0.2d0
x(0)=0.5d0
vx(0)=-0.2d0
x(1)=x(0)+vx(0)*dt
error(1)=-0.5d0*k/m*dt*dt*x(0)*x(0)
error(1)=error(1)-k/(3*m)*dt*dt*dt*x(0)*vx(0)
error(1)=error(1)+k*k/(12*m*m)*x(0)*x(0)*x(0)*dt*dt*dt*dt
error(1)=error(1)-k/(12*m)*vx(0)*vx(0)*dt*dt*dt*dt
```

02

```
c     write(*,*) error
      terror=error(1)
      E(0)=0.5d0*m*vx(0)**2+k/3.0d0*x(0)**3
      t(0)=0.0d0
      do i=1,N-1
      x(i+1)=2.0d0*x(i)-x(i-1)
     &-(k/m)*x(i)*x(i)*dt*dt
      error(i+1)=k*k/(12*m*m)*x(i)*x(i)*x(i)*dt*dt*dt*dt
      error(i+1)=error(i+1)-k/(12*m)*vx(i)*vx(i)*dt*dt*dt*dt
      terror=terror+error(i+1)
      vx(i)=(x(i+1)-x(i-1))/(2*dt)
      E(i)=0.5d0*m*vx(i)**2+k/3.0d0*x(i)**3
      t(i)=i*dt
      end do
      open(unit=10,file='code_verlet_exam.dat')
      do i=0,N-1
      write(10,*) x(i),error(i),E(i),t(i)
      enddo
      close(10)
      write(*,*) terror

      end
```