جامعة الشهيد حمة لخضر الوادي كليــة العلوم الدقيـقة

قسم الكيميـــــاء السنة الثانية علوم المادة كيمياء

الامتحان الســـــــداسي في الريــاضيات التطبيقية

10 جانفي 2018

تمرين .1(03 نقط)

أرسـم ثم أحسب مساحـــــــة الحيز المحصور بين المنحنى البياني للدالــــــتين $y=x$ و $y=x^2$ والمستقيمين $x=0$ و $x=1$.(أرسم الحيـــز المشار اليه أعلاه).

لنرمز لهذ الحيز بالرمز C .أحسب بالتـــــالي :

$$\iint_C (2xy+x)dxdy$$

تمرين.2 (06 نقط)

1.أرسم الحيـز الدائري $D=\{(x,y): 9\leq x^2+y^2\leq 64, x\geq 0, y\leq 0\}$. ثم أحسب مساحـــــــة D .

أحسب باستخدام الاحداثيات القطبيـة على الحيـــز الدائري D التكامـــل

$$\iint_D \frac{2dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

2.أحسب حجم الأسطـوانة $H=\{(x,y,z): x^2+y^2-z^2\leq 0, 0\leq z\leq 2\}$

أحسب باستخدام الاحداثيـــات الأسطـــوانيــة التكامل الثلاثي $\iiint_H f(x,y,z)dxdydz$

نفرض أن f دالة مستمرة وهذا لمـــا : $f(x,y,z)=x^2+y^2+1$.

تمرين.3 (05 نقط)

نعتبـر السلسلة العددية الموجبة : $\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(3^n.n!)^2}{(3n+1)!}$ ادرس طبيـــعة تقارب هذه السلسلة العددية الموجبة.

أختبـــر ثم أوجـــد مجـــال تقارب السلسلــــــــة العددية : $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(2x)^{n-1}}{(3x)^{n+1}}$

ثم أحسب مجمــــــــــوع هذه السلسلة العددية بدلالـــــة x .

تمرين.4 (06 نقط)

1.نعتبـــــــر المعادلة التفاضليـة الخطيـــة :

$$(x^3+x)^2 y' + (3x^2+1)y = x(x^3+x)^2 \exp\left(\frac{1}{x^3+x}\right)$$

أوجــد الحل العام لهـــا.

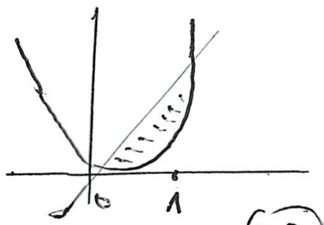
أوجــد الحـــــل الخـــاص لمــــا $y(0)=-1$.

بالتــــــــوفيق

جامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي كلية العلوم الدقيقة
التصحيح النموذجي لامتحان الرياضيات
التطبيقية للسنة ثانية كيمياء

ت 01 (03)

مساحة C



$$\int_0^1\int_{x^2}^{x} dy\,dx = \int_0^1 (x-x^2)\,dx$$

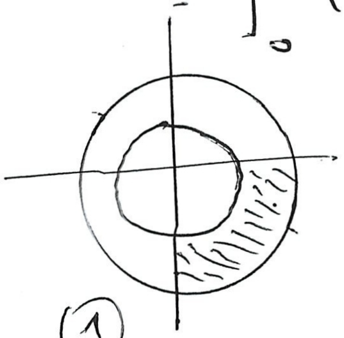
(1) (02)

$$\iint_C (2xy+x)\,dx\,dy = \int_0^1\int_{x^2}^{x} (2xy+x)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(xy^2+xy\right)_{x^2}^{x} dx \quad \ldots$$

(06)

ت 02 مساحة D



(1)

$$\iint_D dx\,dy = \int_3^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \rho\,d\rho\,d\theta$$

(2)

$$\iint_D \frac{2\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2} = \int_3^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{2\rho\,d\rho\,d\theta}{(1+\rho^2)^2}$$

$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad 3\le\rho\le 4,$

ت 3

(1) حجم الأسطوانة نضع $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ z=z$

$$dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\theta\,dz, \quad 0\le z\le 2$$

(2)

$$\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{z} \rho\,d\rho\,d\theta\,dz = 2\pi\int_0^1\left[\int_0^z\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\right]dz$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^2\int_0^z (1+\rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\theta\,dz$$

ت 03 (05) نستخدم معيار دالمبير

$$U_n = \frac{(3^n n!)^2}{(3n+1)!} , \quad \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(3^{n+1}(n+1)!)^2}{(3n+4)!} \cdot \frac{(3n+1)!}{(3^n n!)^2}$$

2,6

$$= \frac{9(n+1)^2}{(3n+4)(3n+3)(3n+2)} < 1$$

فالسلسلة متقاربة

$$\sum_n \frac{(2x)^{n-1}}{(3x)^{n+1}} = \frac{1}{(2x)(3x)} \sum_n \frac{(2x)^n}{(3x)^n}$$

$$\left|\frac{2x}{3x}\right| = \frac{2}{3} < 1$$ متقاربة لما

03

$$\frac{1}{6x^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2x^2}$$ والمجموع يساوي

ت 04 المتجانسة

$$\frac{y'}{y} = -\frac{3x^2+1}{(x^3+x)^2}$$

02

$$\Rightarrow \ln\frac{y}{c} = \frac{1}{x^3+x} \Rightarrow y = c\, e^{\frac{1}{x^3+x}}$$

لما $x \neq 0$.

اللامتجانسة نضع $c = c(x)$ فإن

03 $$y' = \left(c' - \frac{3x^2+1}{(x^3+x)^2}\right) e^{\frac{1}{x^3+x}}$$

$$(x^3+x)^2 y' + (3x^2+1)\, y = c' e^{\frac{1}{x^3+x}} (x^3+x)^2 = x(x^3+x)^2 e^{\frac{1}{x^3+x}}$$

$$\Rightarrow \boxed{c' = x} \Rightarrow c(x) = \frac{x^2}{2} + d .$$

01 نبحث عن d باستخدام $y(1) = -1$.

جامعة الشهيد حمة لخضر الوادي — كلية العلوم الدقيقة — السنة الثانية ماستر رياضيات

الامتحان السداسي في مادة التحليل المركب — 17 جانفي 2018

التمرين الأول (7 نقط)

1 . نعتبر الدالة المركبة : $f(z)=(1-z^3)\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ باستخدام نشور لوران كيف تحسب λ :

$$\lambda=\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$$

2. نعتبر Ω الدائرة التي مركزها المبدأ 0 و نصف قطرها 4 أحسب التكامل المركب :

$$\int_{\Omega}\frac{z+1}{(z^2+4z+3)^2}\exp(iz^2)dz.$$

التمرين الثاني (07 نقط)

7

2

.1 أثبت أن : $|\exp(z^3+i)+\exp(-iz^2)|\le\exp(x^3-3xy^2)+\exp(2xy)$ من أجل كل $z=x+iy$.

.2 لتكن الدالة : $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ هولومورفية من أجل $z=x+iy$ عدد مركب تحقق : $v(x,y)\ge x$ لكل (x,y) . أثبت أن الدالة : $g(z)=\exp(z+if(z))$ هولومورفية وتحقق $|g(z)|\le 1$ من أجل كل z عدد مركب.

2+1

02

3.نفرض أن $f(0)=1$ استنتج من السؤالين السابقين أن $f(z)=iz+1$ من أجل كل z عدد مركب.

التمرين الثالث (06 نقط)

1.طبق نظرية ميتاق لوفلر لا ثبات أن:

$$\frac{\pi}{\tan(\pi z)}=\frac{1}{z}+\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$$

.2 أثبت أن :

$$-\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2=-\frac{1}{z^2}-\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$$

3. باستخدام السؤال الثاني أستنتج من جديد الدستور :السابق (الأول)

.أي أن

$$\frac{\pi}{\tan(\pi z)}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$$

4. أثبت التقارب المطلق للجداء اللامنته : $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$ ثم تأكد انه يساوي : $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$

استنتج حسابا للجداء اللامنته : $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$.

بالتوفيق و السداد — أستاذ المسؤول للمقياس

جامعة الشهيد حمه لخضر   كلية العلوم الدقيقة

تصحيح الامتحان السداسي في التحليل المركب.

السنة ثانية رياضيات ماستر 2.

التمرين الأول ①

$$f(z) = (1 - z^3)\, e^{\frac{1}{z}}$$

$$\Rightarrow (1 - z^3)\, e^{\frac{1}{z}} = (1 - z^3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^n}$$

ن3

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+3)!} \right) \frac{1}{z^n} + 1 - \sum_{n=0}^{3} \frac{z^{3-n}}{n!}$$

ومنه

$$\operatorname{Res}_0 f(z) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{4!} = \frac{23}{24}$$

② بملاحظة

$$z^2 + 4z + 3 = (z+1)(z+3)$$

و بما أن $|-3| < 4$ ، $|-1| < 4$

ن04

$$\int_C \frac{(z+1)\, e^{iz^2}}{(z^2+4z+3)^2}\, dz = 2i\pi \left\{ \left(\frac{(z+1)\, e^{iz^2}}{(z+3)^2} \right)'_{z=-1} + \left(\frac{(z+1)\, e^{iz^2}}{(z+1)^2} \right)'_{z=-3} \right\}$$

التمرين الثاني.

①

ن03

$$\left| e^{z^3+i} + e^{-iz^2} \right| \leq \left| e^{z^3+i} \right| + \left| e^{-iz^2} \right|$$

$$\leq e^{x^3 - 3xy^2} + e^{2xy}$$

①

② $g(z) = \exp(z + i f(z))$ هولومورفية بالفعل

ن1 $g'(z) = (1 + i f'(z)) \exp(z + i f(z))$

ومنه g هولومورفية .

$$|g(z)| = |\exp(-v(x,y) + i u(x,y) + x + iy)|$$

02 $$= \exp(x - v(x,y))$$

لدينا $v(x,y) \le x \Rightarrow x - v(x,y) \le 0$

ومنه $|g(z)| \le 1$ ؛ g هولومورفية

ومنه g محدودة إذن حسب نظرية ليوفيل

g ثابتة ، $g' = 0 \Rightarrow i f'(z) + 1 = 0$ ن1

$\Rightarrow f'(z) = i \Rightarrow f(z) = iz + 1$.

التمرين الثالث ① بالرجوع للدرس تطبيق نظرية ميتاغ

لدينا 1,5ن $$\frac{\pi}{\tan \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$$

② بالاشتقاق 1,5ن $$-\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z-n)^2}$$

[illegible]

٠١١٢ $$\Rightarrow \frac{\pi}{\tan \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

لأن متقاربة $\sum_{n} \left|\frac{z}{n}\right|^2$ (3')

١١٢

متقاربة، وهو يساوي $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$$ ومنه