جامعة الشهيد حمى لخضر - الوادي

كلية العلوم الدقيقة

سنة ثانية رياضيات

مقياس : المنطق الرياضي

الموسم الجامعي2018/2017

امتحان الدورة العادية لسداسي الأول

التمرين الاول: (٥ نقاط)

1. لتكن A و B قضيتين منطقيتين برهن أن

$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

2. أذكر بعض أنماط البرهان
3. أكتب صيغتي مرغان المعممة ثم برهن إحداهما

التمرين الثاني: (4 نقاط)

لتكن القضايا الأولية P_1,P_2 و P_3 ولتكن المجموعة $E = \{0, 1\}$ بحيث يكون التطبيق F من E^3 نحو E معرف بالجدول التالي

P_1	P_2	P_3	F
1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
0	0	1	0
1	1	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	0	0

أ كتب القضية A التي تمثل التطبيق F على الشكل القياسي المنفصل ثم اعد كتابتها على الشكل القياسي المتصل.

التمرين الثالث: (6 نقاط)

نرمزبي <.> و [.] لدالتين معرفتين من E^n نحو E (n عدد طبيعي) كمايلي

$$<X_1,X_2,\ldots X_n> = X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_n \qquad [X_1,X_2,\ldots X_n] = X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n$$

بحيث $X_1, X_2, \ldots, X_n$ قضايا منطقية

إذا كانت لدينا a, b و c قضايا منطقية برهن إذن بدون إستعمال جدول الحقيقة أن:

$$<[(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))]> =$$

$$<[a, \bar{a}, c] \text{ و } [a, \bar{a}, \bar{b}, c] \text{ و } [\overline{(b \to c)}, \overline{(a \to b)}, (a \to c)]>$$

التصحيح النموذجي لإمتحان الدورة العادية
لسداسي الأول في المنطق الرياضي

التمرين الأول: (1) إثبات أن $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$ بإستعمال جدول الحقيقة

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

0,5 0,5 0,5 0,5

وبمقارنة طرفي المساوات المتحصل عليها في الجدول نتأكد من صحتها

(2) كما ذكرناها في الدرس (0,5 على كل عنصر)

(3) قانون مورغان المعمم:

نص القانون 0,5

لتكن $A_1, A_2, \dots, A_n$ قضايا منطقية (n عدد طبيعي غير معدوم) فإن:

0,5 $\overline{A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n} = \overline{A_1} \vee \overline{A_2} \vee \dots \vee \overline{A_n}$ — (1)

و

0,5 $\overline{A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n} = \overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge \dots \wedge \overline{A_n}$ — (2)

الإثبات: نثبت المساوات (1): نستعمل البرهان بالتراجع

0,5 لإحدى الخاصيتين

من أجل $n=1$ نجد الخاصية $P(1)$: $\overline{A_1} = \overline{A_1}$ وهذا واضح

من أجل $n=2$ نجد الخاصية $P(2)$: $\overline{A_1 \wedge A_2} = \overline{A_1} \vee \overline{A_2}$ وهذا ما أثبتناه في السؤال (1)

مبدأ البرهان بالتراجع 0,5

نفرض الآن أن الخاصية $P(n)$ صحيحة المتمثلة في المساوات (1) ثم نثبت الخاصية:

كتابة الخاصية $P(n+1)$ 0,5

$P(n+1)$: $\overline{A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge A_{n+1}} = \overline{A_1} \vee \overline{A_2} \vee \dots \vee \overline{A_{n+1}}$

نبدأ من اليسار إلى اليمين ونضع $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n = B$

نجد إذن:

$$\overline{A_1 \wedge \dots \wedge A_m \wedge A_{m+1}} = \overline{B \wedge A_{m+1}}$$

$$= \overline{B} \vee \overline{A_{m+1}}$$

$$= \overline{A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m} \vee \overline{A}_{m+1}$$

وهذا باستعمال السؤال ①

باستعمال السؤال ① نقطة

باستعمال الخاصية $P(m)$ نقطة

وحسب الفرض (كون الخاصية $P(m)$ صحيحة) فإن:

$$\overline{A_1 \wedge \dots \wedge A_m \wedge A_{m+1}} = \overline{A_1} \vee \overline{A_2} \vee \dots \vee \overline{A_m} \vee \overline{A}_{m+1}$$

وهو المطلوب إثباته

التمرين الثاني: من خلال الجدول نستطيع مباشرة أن نكتب A على:

① على الشكل القياسي المتصل كمايلي:

$$\boxed{A = (P_1 \vee P_2 \vee \overline{P_3}) \wedge (\overline{P_1} \vee \overline{P_2} \vee P_3) \wedge (P_1 \vee \overline{P_2} \vee P_3) \wedge (\overline{P_1} \vee P_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee P_3)}$$

نقطتين

② وعلى الشكل القياسي المنفصل كمايلي

$$\boxed{A = (P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \vee (\overline{P_1} \wedge P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge \overline{P_2} \wedge P_3)}$$

نقطتين

التمرين الثالث: نستعمل التعريف $P \to q \Leftrightarrow \overline{P} \vee q$

أي: $\Leftrightarrow [\overline{P}, q]$

على هذا الأساس نبدأ في تحليل الخطوة الأولى 3

$$\langle [A] \rangle = [A] = A \quad (n=1)$$

حسب تعريف الدالتين < > و [ ] من أجل n=1 نستطيع أن نكتب

$$<\{[(a\to(b\to c))\to((a\to b)\to(a\to c))]\}> =$$

0,5 نقطة

$$= \overline{(a\to(b\to c))} \to \underbrace{((a\to b)\to(a\to c))}_{A}$$

$$= \overline{a\to(b\to c)} \vee A$$ (1)

$$= (a\wedge\overline{b\to c})\vee A$$ (1)

$$= (a\vee A)\wedge\underbrace{(\overline{(b\to c)}\vee A)}_{B}$$ حسب خاصية توزيع الفصل على الوصل (1)

(1)

$$= (a\vee\underbrace{(a\to c)}\vee\overline{(a\to b)})\wedge B \quad \left(A=\overline{a\to b}\vee a\to c\right)$$

$$= \underbrace{(a\vee\bar a\vee c)\vee(a\wedge\bar b)}\wedge B$$ (1)

0,5 نقطة + 0,5 نقطة

$$= (a\vee\bar a\vee c\vee a)\wedge(a\vee\bar a\vee c\vee\bar b)\wedge(\overline{(b\to c)}\vee\overline{(a\to b)}\vee(a\to c))$$

$$(a\vee\bar a\vee c)$$

0,5

$$= <[a,\bar a,c],[a,\bar a,\bar b,c],[\overline{b\to c},\overline{(a\to b)},a\to c]>$$