Examin en Géométrie Differentielle 1 / 2017/2018

(Session Normale)

Exercice 01 : 05 pts

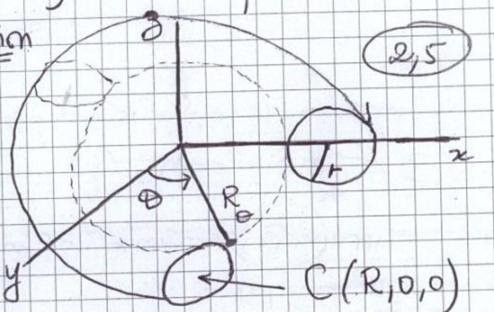
On suppose $R > r > 0$

1) Représenter la partie T de $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-R\right)^2+z^2=r^2$$

2) Montrer que c'est une sous variété de $\mathbb{R}^3$

Solution



2,5

T est invariant par le groupe des rotations d'axe (Oz)

R : la distance moyenne de l'axe $2\pi r$ longeur de la génératrice aire $2\pi r \times 2\pi r$

R_θ est la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe Oz et d'angle θ

pour tout angle θ, $R_\theta(T)=T$; P_+ le plan positif

$P_+ = \{(x,0,z) \mid x>0\}$ (Comme si P_+ est le Couleaux)

$T \cap P_+ = C$; $\mathbb{R}^3 = \bigcup R_\theta P_+$

$= \bigcup R_\theta C$

T est obtenu en faisant tourner C autour de (Oz)

* Montrons que T sous variété :

2,5

$$f : \mathbb{R}^3 / (Oz) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longrightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2}-R\right)^2+z^2$$

de C^∞

Les champs de vecteurs de classe C^∞ forment un e[illegible] vectoriel $D(E)$, l'application $D(E)\times D(E) \longrightarrow D(E)$
$(X,Y) \longmapsto [X,Y]$
est bilinéaire antisymétrique
et vérifie l'identité de Jacobie, on dit $D(E)$ muni de $[\cdot,\cdot]$ est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de classe C^∞

$Xf : E \longrightarrow \mathbb{R} \in C^p$

$$D(Xf)(x)(h) = D\Psi[\varphi(x)]\circ[D\varphi(x)(h)] = D\Psi[Df(x), X(x)] \circ [D^2f(x)(h), DX(x)(h)]$$

$$= \Psi[Df(x), DX(x)(h)] + \Psi[D^2f(x)(h), DX(x)(h)]$$

$$= \Psi[Df(x), DX(x)(h)] + \Psi[D^2f(x)(h), X(x)] \quad \forall x, h \in E$$

$$D(Xf)(x)(h) = Df(x)[DX(x)(h)] + D^2f(x)[h, X(x)],$$
$$\forall x, h \in E.$$

alors:

$$Y(Xf)(x) = [D(Xf)(x)](Y(x)) = [Df(x)\circ DX(x)](Y(x)) + D^2f(x)[X(x), Y(x)].$$

Le théorème de Schwartz.

$$\left([X,Y](f)(x)\right) = X(Yf)(x) - Y(Xf)(x) = Df(x)[DY(x)(X(x)) - DX(x)(Y(x))].$$

Exercice 3 (5)

Soit $D \subset \mathbb{R}^3$, un domaine bornée de l'espace $\mathbb{R}^3$ de bord ∂D. Montrer que si f et g sont des fonctions C^∞ sur un ouvert $U \supset D$ on a:

$$\int_D (g\Delta f - f\Delta g)\, dx\wedge dy\wedge dz = \int_{\partial D} \omega \text{ tel que:}$$

$\omega = g\left(\frac{\partial f}{\partial x} dy \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y} dz \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z} dx \wedge dy\right) -$

$f\left(\frac{\partial g}{\partial x} dy \wedge dz + \frac{\partial g}{\partial y} dz \wedge dx + \frac{\partial g}{dz} dx \wedge dy\right)$

et Δ est Laplacien $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Solution: D'après la formule de Stocks $\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$.

soit α et β les deux formes qui vont intervenir dans l'expression de ω, on a

$\omega = g\alpha - f\beta$

$dg \wedge \alpha = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$

$dg \wedge \beta = dg \wedge \alpha$; $d\alpha = \Delta f \, dx \wedge dy \wedge dz$

$d\beta = \Delta g \, dx \wedge dy \wedge dz$.

Par Conséquant: $d\omega = (dg \wedge \alpha - df \wedge \beta) + (g\,d\alpha - f\,d\beta)$

$= (g\Delta f - f\Delta g)\, dx \wedge dy \wedge dz$.

Donc: $\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega = \int_D (g\Delta f - f\Delta g)\, dx \wedge dy \wedge dz$.

05 Exercice 4: ~~Démontrer~~ Soit X, Y, Z trois Champs de vecteurs ~~soit~~ démontrer la première identité de Bianchi:

$R_{X,Y} Z + R_{Y,Z} X + R_{Z,X} Y = 0$

Solution: $R_{X,Y} Z + R_{Y,Z} X + R_{Z,X} Y =$

$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z +$

$\nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]} X +$

$\nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]} Y$