Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique

Exercice 1 (8 pts)

1°/ On obtient par le développement de Taylor les approximations suivantes :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) + O(\Delta t)$$

$$\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) + \frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t^n) + O(\Delta x^4)$$

$$\frac{U_{i+2}^n - U_{i-2}^n}{4\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) + \frac{4\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t^n) + O(\Delta x^4)$$

On en déduit pour u solution régulière de l'équation de transport : $(\alpha+\beta) = 1$ et :

$$R_i^n = (\alpha + 4\beta)\frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t^n) + O(\Delta x^4)$$

donc : $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \frac{4}{3}\ ;\ \beta = -\frac{1}{3}$.

1 en temps et 4 en espace.

2/ posons $\alpha = 1$, $\beta = 0$

le problème (P_h) est comme suit :

$$\begin{cases} \dfrac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + c\,\dfrac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \\ U_i^0 = 0 \quad i \leq 0 \\ U_i^0 = 1 \quad i > 0 \ldots \end{cases}$$

le principe du maximum :

$$(\text{Si } u_0(x) \geq 0) \Longrightarrow u(x) \geq 0.$$

pour la forme discrèt :

$$u_0(x) \geq 0 \Longrightarrow U_i^n \geq 0 \quad \forall i, \forall n.$$

Notre schéma est :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\left(U_{i+1}^n - U_{i-1}^n\right).$$

pour $n=0$, $i=0$.

$$\text{on a : } U_0^1 = U_0^0 - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\left(U_1^0 - U_{-1}^0\right)$$

$$U_0^1 = 0 - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(1-0).$$

donc : $U_0^1 = -\frac{c\Delta t}{2\Delta x} < 0$

la positivité n'est pas garder.

d'où : le schéma est instable.

Exercice 2 (10pts) :

1°/ Consistance : $\qquad k = \Delta t, \quad h = \Delta x.$

On obtient par le développement de Taylor

$$|R_i^n| \leq C_1(k + h^2).$$

où $C_1 = \max\left(\frac{1}{2}\|U_{tt}\|_\infty, \frac{1}{6}\|U_{xxx}\|_\infty, \frac{1}{12}\|U_x^{(4)}\|_\infty\right)$

2/ Stabilité en norme L^∞ :

on a :

$$U_i^{n+1} = \left(1 - \frac{2k}{h^2}\right) U_i^n + \left(\frac{k}{h^2} - \frac{\alpha k}{h}\right) U_{i+1}^n + \left(\frac{k}{h^2} + \frac{\alpha k}{h}\right) U_{i-1}^n$$

$$* \quad 1 - \frac{2k}{h^2} + \frac{k}{h^2} - \frac{\alpha k}{h} + \frac{k}{h^2} + \frac{\alpha k}{h} = 1$$

$$** \quad 1 - \frac{2k}{h^2} \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{k}{h^2} - \frac{\alpha k}{h} \geq 0$$

donc :

$$* \quad k \leq \frac{h^2}{2}$$

$$** \quad h \leq \frac{1}{2\alpha}.$$

Le Schéma Centré est donc stable sous les deux Conditions suivantes :

$$h \leq \frac{1}{2\alpha} \quad \text{et} \quad k \leq \frac{h^2}{2}.$$

3/ on a : $e_i^{n+1} = \left(1 - \frac{2k}{h^2}\right) e_i^n + \left(\frac{k}{h^2} - \frac{\alpha k}{h}\right) e_{i+1}^n + \left(\frac{k}{h^2} + \frac{\alpha k}{h}\right) e_{i-1}^n$
$+ k R_i^n$

à partir du Ques (2) on a :

$$|e_i^n| \leq C_2 (k + h^2) \quad e_i^0 = 0 \; ; \; C_2 = T C_1 .$$

4/ (P_h) sous forme matricielle. $\lambda = \frac{k}{h^2}$; $\gamma = \frac{k}{h}$

$$U^{n+1} = (\lambda - \alpha\gamma) U_{i+1}^n + (1 - 2\lambda) U_i^n + (\lambda + \alpha\gamma) U_{i-1}^n$$

$$U^{n+1} = A U^n .$$

la matrice d'itération

$$A = \begin{pmatrix} 1-2\lambda & \lambda-\alpha\gamma & & & \bigcirc \\ \lambda+\alpha\gamma & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \lambda-\alpha\gamma \\ \bigcirc & & & \lambda+\alpha\gamma & 1-2\lambda \end{pmatrix}$$

Quest du Cours (2pts).

1°/ Limitation de la géometrie des domaines de Calculs (Simple).

2°/ Difficultés de prise en Compte des Conditions aux limites (Newman).