التصحيح النموذجي لامتحان المعادلات

2018/2017 3Math الفيزياء الرياضية

التمرين الأول:

I- $u(x,y)=f(ax+y)e^{-bx}$

$$u_x = a f'(ax+y)e^{-bx} - b f(ax+y)e^{-bx}$$

$$u_y = f'(ax+y)e^{-bx}$$

نلاحظ أن $u_x + a u_y = -bu$ (01)

ومنه الـ م ت ج التي يكون u حلا لها هي: $\boxed{u_x - a u_y + bu = 0}$

II- حل مسألة القيم الابتدائية

$$\begin{cases} y u_x + u_y = y u^2 \\ u(x,0)=x \end{cases}$$

حسب طريقة المميزات:

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = y \\ \frac{dy}{ds} = 1 \end{cases} \text{ المعادلات المميزة } (0,5) \qquad \begin{cases} x(\tau,0)=\tau \\ y(\tau,0)=0 \end{cases} \qquad \boxed{u(\tau,0)=\tau} \ (0,5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{ds} = s \\ y = s \ (0,5) \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}s^2 + \tau \ (0,5) \Rightarrow \tau = x - \frac{1}{2}s^2 = x - \frac{1}{2}y^2$$

المعادلة التفاضلية العادية

$$\frac{du}{ds} = s u^2 \ (0,5) \Longrightarrow \frac{du}{u^2} = s\,ds \Rightarrow -\frac{1}{u} = \frac{1}{2}s^2 + C \Rightarrow C = -\frac{1}{u(\tau,0)} = -\frac{1}{\tau} \ (0,5)$$

$$-\frac{1}{u} = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{\tau} \Rightarrow u(\tau,s) = \frac{2\tau}{2-s^2\tau} \ (0,5)$$

بالرجوع إلى x و y نجد

$$\boxed{u(x,y) = \frac{4x-2y^2}{4-2xy^2+y^4}} \ (0,5)$$

III- نضع $u_y = v$ (0,5) وعليه الـ م ت ج تصبح

بالنسبة لـ x

$$x v' + 3v = y^3$$

$$\Leftrightarrow v' + \frac{3}{x}v = \frac{y^3}{x} \xrightarrow{\text{حلها}} v(x) = C(y)e^{-\int\frac{3}{x}dx} + e^{-3\int\frac{dx}{x}}\left(\int \frac{y^3}{x} e^{\int\frac{3dx}{x}} dx\right)$$

$x \neq 0$

$$= \frac{C(y)}{x^3} + \frac{1}{3}y^3 \ (0,5)$$

$\boxed{u(x,y)=\frac{1}{12}y^4+F(x)}$

$$u_y = v(x,y) \Longrightarrow u(x,y) = \int v(x,y)dy + F(x)$$

مكاملة مباشرة و في حالة x=0

$$= \int \frac{C(y)}{x^3}dy + \int \frac{1}{3}y^3 dy + F(x)$$

حيث F , G دوال كيفية

$$\boxed{u(x,y) = \frac{G(y)}{x^3} + \frac{1}{12}y^4 + F(x)} \ (0,5)$$

التمرين الثاني

$$(IVP)\begin{cases} U_{tt}-3U_{xx}=0 \quad \dots (1) \\ U(x,0)=f(x),\ U_t(x,0)=g(x)\end{cases}$$

(1) لدينا $\xi = x-\sqrt{3}t$ ، $\eta = x+\sqrt{3}t$ 0,5

$$U_{tt}=3U_{\xi\xi}+3U_{\eta\eta}-6U_{\eta\xi} \quad 0,5$$

$$U_{xx}=U_{\xi\xi}+U_{\eta\eta}+2U_{\eta\xi}$$

بالتعويض في (1) نجد

$$\boxed{-12U_{\xi\eta}=0 \Leftrightarrow U_{\xi\eta}=0} \quad 0,5$$

الحل العام بالمكاملة المباشرة بالنسبة لـ ξ ثم η

$$U_\eta = H(\eta) \Rightarrow U(\xi,\eta)=\int H(\eta)d\eta + G(\xi)$$

$$= F(\eta)+G(\xi) \quad 0,5$$

بالرجوع إلى x و t حيث F و G من C^2

$$\boxed{U(x,t)=F(x+\sqrt{3}t)+G(x-\sqrt{3}t)} \quad 0,5$$

(2) بالاشتقاق بالنسبة لـ t واستعمال الشرط $U_t(x,0)=g(x)$ نجد

$$\sqrt{3}\,F'(x+\sqrt{3}t)-\sqrt{3}\,G'(x-\sqrt{3}t)=g(x)$$

$$t=0 \longrightarrow \quad F'(x)-G'(x)=\frac{g(x)}{\sqrt{3}}$$

بالمكاملة بالنسبة لـ x نجد

$$F(x)-G(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^x g(s)ds \quad 0,5 \quad \dots (1)$$

بأخذ $t=0$ في الحل العام واستعمال الشرط $U(x,0)=f(x)$ نجد

$$F(x)+G(x)=f(x) \quad 0,5 \quad \dots (2)$$

جملة معادلتين حلها نجد:

$$\begin{cases} F(x)=\dfrac{f(x)}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\displaystyle\int_0^x g(s)dx \quad 0,5 \\ G(x)=\dfrac{f(x)}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\displaystyle\int_0^x g(s)dx \quad 0,5\end{cases}$$

بتعويض F و G في الحل العام نجد المطلوب بالتعويض وباستعمال خواص التكامل 0,5

$$\int_a^b = -\int_b^a \qquad \int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$$

(3) حساب الحل في الحالة $f(x)=g(x)=C\in\mathbb{R}$

$$U(x,t)=\frac{C+C}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\int^{x+\sqrt{3}t} C\,ds = \boxed{C+tC} \quad 01$$

2/4

التمرين الثالث =

-I

$$\begin{cases} X'' - KX = 0 \\ X(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

1) $K = 0$ ← $X(x) = AX + B$ ⟵ حل معدوم
الشروط الحدية

2) $K > 0$ 0,5
$$X(x) = A e^{-\sqrt{K}x} + B e^{\sqrt{K}x}$$
$$0 = X(0) = A + B \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow A = -B$$
$$X'(x) = -\sqrt{K} A e^{-\sqrt{K}x} + \sqrt{K} A e^{\sqrt{K}x}$$
$$= -A\sqrt{K}\left(e^{-\sqrt{K}x} + e^{\sqrt{K}x}\right)$$ 0,5
$\neq 0$

$A = 0 \Leftarrow X'(L) = 0$
ومنه الحل المعدوم

3) $K < 0$ نضع $K = -\mu^2$ الحل العام
$$X(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)$$
$$X(0) = A \Longrightarrow A = 0$$
الشروط الحدية
ومنه $X(x) = B\sin(\mu x)$ ⟵ حسب الشرط الثاني
$$X'(x) = \mu B\cos(\mu x)$$
$\cos(\mu L) = 0 \Leftarrow \left(0 = X'(L)\right.$
$\mu L = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Leftarrow$
$$\Rightarrow \boxed{\mu = (2n+1)\frac{\pi}{2L}}$$ 0,5

$$\boxed{X(x) = B\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2L}x\right)}$$ 0,5 الحل هو
$n = 0, 1, 2, \ldots$

-II

$$\begin{cases} U_t = U_{xx} & 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad t > 0 \\ U(0,t) = U_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0 \\ U(x,0) = f(x) \end{cases}$$

1) التفسير الفيزيائي: • مسألة إنتشار الحرارة على طول القطعة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
الشروط الحدية ⟵ $U(0,t) = U_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0$ 1,5
$U(x,0) = f(x)$ يعبر على الحرارة الابتدائية

0,5×3

3/4

② فصل المتغيرات $u(x,t) = X(x).T(t)$ (0,5)

بالاشتقاق والتعويض نجد $T'(t)\,X(x) = X''(x)\,T(x)$

بالقسمة على $X(x).T(t)$

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = k \Longrightarrow \begin{cases} X'' - kX = 0 & X(0) = X'(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ T' - kX = 0 \quad \dots (2) \end{cases} \quad (0,5)$$

حل المسألة

$$X_n(x) = \sin(2n+1)x \;\; (0,5) \xleftarrow{\text{حسب (1) نجد}} \begin{cases} X'' - kX = 0 \\ X(0) = X'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

$n = 0,1,2,\dots$

$$\boxed{K = -(2n+1)^2} \quad n = 0,1,\dots$$

بالتعويض عن K في (2) نجد

$$T_n(t) = e^{-(2n+1)^2 t} \;\; (0,5) \Longleftarrow T' + (2n+1)^2 T = 0$$

وعليه الحل يعطى ب

$$u(x,t) = \sum_{n \geq 0} b_n e^{-(2n+1)^2 t} \sin(2n+1)x \quad (0,5)$$

نعين b_n باستعمال الشرط الابتدائي

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n \geq 0} b_n \sin(2n+1)x \Longrightarrow b_n = \frac{2}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi/2} f(x) \sin(2n+1)x\,dx \quad (0,5)$$

$n = 0,1,2,\dots$

③ حساب الحل في الحالة $f(x) = \sin(3x)$

$$b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin(3x)\sin(2n+1)x}_{\text{جملة متعامدة}}\,dx$$

$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$

حساب هذا التكامل يمكن بتعويضه مباشرة باستعمال

$n \neq 1 \Longrightarrow b_n = 0$ (0,5)

$$n = 1 \quad b_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2(3x)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(6x))\,dx = 1 \quad (0,5)$$

وعليه حل المسألة

$$\boxed{u(x,t) = e^{-9t} \sin 3x} \quad (0,5)$$