جامعة الشهيد حمه لخضر الوادي

كلية العلوم الدقيقة

قسم الرياضيات و الاعلام الالي

السنة اولى رياضيات و اعلام الي

السنة الدراسية 2017 / 2018

الدورة العادية السداسي 01

اختبار في مقياس الجبر 01

التمرين الاول : بين صحة او خطاء كل قضية من القضايا التالية ثم شكل نفي كل منها

.1) $\exists x\in\mathbb{Z}, \forall y\in\mathbb{Z} : x^2+y^2 > 0$ ....(1.5ن)

.2) $\forall x\in\mathbb{Z}, \forall y\in\mathbb{Z} : xy \neq 0$ ....(1.5ن)

.3) $\forall x\in\mathbb{Z} : x<3 \Rightarrow x^2<9$ ....(1.5ن)

التمرين الثاني : لتكن B , A مجموعتان جزئيتان من مجموعة E ، نعرف الفرق التناظري بين A و B بـ

$$A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$$

1) اثبت ان $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$ ....(2ن)

2) احسب $A\Delta A$ و $A\Delta\emptyset$ و $A\Delta E$ ....(1.5ن)

3) من اجل $A=\{2,4,6,7\}$ عين مجموعة أجزاء A (اي $\mathcal{P}(A)$) و تجزئة لـ A بها على الأقل عنصرين ....(1ن)

التمرين الثالث : ليكن $f : [0,1[\rightarrow[1, +\infty[$ تطبيق حيث $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

1) اثبت ان f تطبيق تقابلي ....(3ن)

2) عين تطبيقه العكسي ....(1ن)

التمرين الرابع :

لتكن $Aff(IR)$ مجموعة التطبيقات التآلفية من IR في IR

اي $Aff(IR)=\{f_{(a,b)} : IR\rightarrow IR \;/\; f_{(a,b)}(x)=ax+b \wedge (a,b)\in IR^*\times IR\}$

نرمز بـ o لعملية تركيب التطبيقات حيث من اجل $f_{(a,b)}$ و $f_{(a',b')}$ من $Aff(IR)$ فان من اجل كل x من IR:

$$f_{(a',b')}\, o\, f_{(a,b)}(x)=f_{(a',b')}(f_{(a,b)}(x))= f_{(a',b')}(ax+b)=a'(ax+b)+b'$$

1) اثبت ان $(Aff(IR), o)$ زمرة غير تبديلية ....(5ن)

2) اثبت ان $T(IR) =\{ f_{(1,b)}: IR\rightarrow IR \;/\; f_{(1,b)}(x)=x+b \}$ تشكل زمرة جزئية من $Aff(IR)$ ....(2ن)

ملاحظة $f_{(a,b)}$ ترمز لتطبيق تالفي بحيث معامل x هو a و حده الثابت هو b

بالتوفيـــــق

1.1

ومنه f متباين

f غامر:

ليكن $y \in [1,+\infty[$ حيث $y = f(x)$

$\Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{y} \quad (y > 1)$

$\Rightarrow 1-x^2 = \frac{1}{y^2} \Rightarrow x^2 = \frac{y^2-1}{y^2} \quad (\geq 0)$

$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{y^2-1}{y^2}} \in [0,1[$ لأن $y > 1$

$x = -\sqrt{\frac{y^2-1}{y^2}}$ مرفوض (سالب)

ومنه f غامر

f متباين و غامر وبالتالي f تقابلي

1.5

2) بما أن f تقابلي فهو يقبل تطبيق عكسي f حيث

$f^{-1} : [1,+\infty[\longrightarrow [0,1[$

$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

1

التمرين الرابع:

1) a) اثبات ان "o" عملية داخلية في $Aff(\mathbb{R})$

من أجل $x \in \mathbb{R}$ لدينا

$f_{(a',b')} \circ f_{(a,b)}(x) = a'(ax+b)+b' = a'ax + a'b + b'$

$= f_{(a'a,\, a'b+b')}(x)$

ومنه $f_{(a',b')} \circ f_{(a,b)} = f_{(a'a,\, a'b+b')} \in Aff(\mathbb{R})$

ومنه العملية "o" داخلية في $Aff(\mathbb{R})$

1

b) o ليست تبديلية

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا

$f_{(2,1)} \circ f_{(1,-3)}(x) = f_{(2,1)}(x-3) = 2(x-3)+1 = 2x-5$

$f_{(1,-3)} \circ f_{(2,1)}(x) = f_{(1,-3)}(2x+1) = (2x+1)-3 = 2x-2$

ورقة إضافية ./.

التصحيح النموذجي لمقياس الجبر 1 .... 20.18/12/2012

التمرين الأول:

1) القضية صحيحة لأنه يوجد $x=1$ من $\mathbb{Z}$ بحيث المتباينة $1+y^2>0$ صحيحة مهما يكن y من $\mathbb{Z}$ 1/2

نفي القضية: $\forall x\in\mathbb{Z},\ \exists y\in\mathbb{Z}:\ x^2+y^2\leq 0$

2) قضية خاطئة لأنه من أجل $x=0$ و $y=3$ من $\mathbb{Z}$ فإن $xy=0$ 1/2

نفي القضية: $\exists x\in\mathbb{Z},\ \exists y\in\mathbb{Z}:\ xy=0$

3) قضية خاطئة، لأنه من أجل $x=-4$ فإن $x<3$ لكن المتباينة $16=x^2>9$

خاطئة، نفيها: $\exists x\in\mathbb{Z}:\ (x<3)\wedge(x^2>9)$ 1/2

التمرين الثاني:

1) ليكن $x\in A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$

$\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\ \wedge\ x\notin(A\cap B)$ 0.5

$\Leftrightarrow (x\in A\vee x\in B)\wedge(x\notin A\vee x\notin B)$

$\Leftrightarrow \{(x\in A)\wedge(x\notin A\vee x\notin B)\}\vee\left[(x\in B)\wedge(x\notin A\vee x\notin B)\right]$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin A)\vee(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\vee(x\in B\wedge x\notin B)$ 1

$\Leftrightarrow x\in\phi\vee x\in(A-B)\vee x\in(B-A)\vee x\in\phi$ 0.5

$\Leftrightarrow x\in\phi\cup(A-B)\cup(B-A)\cup\phi$

$\Leftrightarrow x\in(A-B)\cup(B-A)$

ومنه المساواة

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$$

2)

- $A\Delta A=(A\cup A)-(A\cap A)=A-A=\phi$ 0.5
- $A\Delta\phi=(A\cup\phi)-(A\cap\phi)=A-\phi=A$
- $A\Delta E=(A\cup E)-(A\cap E)=E-A$ 0.5

3) $\mathcal{P}(A)=\{\phi,\{2\},\{4\},\{6\},\{7\},\{2,4\},\{2,6\},\{2,7\},\{4,6\},$

$\{4,7\},\{6,7\},\{2,4,6\},\{2,4,7\},\{2,6,7\},\{4,6,7\},A\}$ 0.5

تجزئة لـ A هي $H=\{\{2\},\{4,6,7\}\}$ 0.5

التمرين الثالث

1) f متباينة؟ ليكن x_1, x_2 من $[0,1[$ حيث $f(x_1)=f(x_2)$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x_2^2}} \Rightarrow \frac{1}{1-x_1^2}=\frac{1}{1-x_2^2} \Rightarrow 1-x_1^2=1-x_2^2$

$\Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow x_1=x_2$ (مرفوض $x_1=-x_2$)

وعليه $f_{(2,1)} \circ f_{(1,-3)}(0) = -5 \neq f_{(1,-3)} \circ f_{(2,1)}(0) = -2$

ومنه $f_{(2,1)} \circ f_{(1,-3)} \neq f_{(1,-3)} \circ f_{(2,1)}$

ومنه $\circ$ غير تبديلية

$\circ$ عملية تجميعية: ليكن x من $\mathbb{R}$

$\bullet \left(f_{(a,b)} \circ f_{(a',b')}\right) \circ f_{(a'',b'')}(x) = f_{(aa',\, ab'+b)} \circ f_{(a'',b'')}(x)$

$= f_{(aa',\, ab'+b)}(a''x+b'') = aa'(a''x+b'') + ab'+b$

$= aa'a''x + aa'b'' + ab' + b$ — (1)

$\bullet f_{(a,b)} \circ \left(f_{(a',b')} \circ f_{(a'',b'')}\right)(x) = f_{(a,b)} \circ \left(f_{(a',b')}(a''x+b'')\right)$

$= f_{(a,b)}\left(a'(a''x+b'')+b'\right) = a(a'a''x + a'b'' + b') + b$

$= aa'a''x + aa'b'' + ab' + b$ — (2)

ومنه (1) = (2) نستنتج أن $\circ$ عملية تجميعية

العنصر الحيادي: ليكن $f_{(n,m)}$ حيث $(n,m) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ تحقق

$f_{(a,b)} \circ f_{(n,m)}(x) = f_{(a,b)}(x)$ — (1)

و

$f_{(n,m)} \circ f_{(a,b)}(x) = f_{(a,b)}(x)$ — (2)

حل المعادلة (1)

$(1) \Leftrightarrow f_{(a,b)}(nx+m) = ax+b$

$\Rightarrow a(nx+m)+b = ax+b$

$\Rightarrow \begin{cases} an = a \\ am + \cancel{b} = \cancel{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ m = 0 \end{cases}$ $(a \neq 0)$ (لأن a كيفي)

ورقة إضافية ./.

حل المعادلة (2)

(2) $\Leftrightarrow f_{(n,m)}(ax+b) = ax+b$

$\Leftrightarrow n(ax+b)+m = ax+b$

$\Leftrightarrow nax + nb + m = ax+b$

$\Leftrightarrow \begin{cases} na = a \\ nb+m = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ m = 0 \end{cases}$

ومنه نستنتج أن العنصر الحيادي هو $f_{(n,m)} = f_{(1,0)} = I_{\mathbb{R}}$

أي التطبيق المطابق $f_{(1,0)}(x) = x$

ليكن عنصر نظير للعنصر $f_{(a,b)}$ و $f_{(a',b')}$ من $Aff(\mathbb{R})$ حيث

من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$f_{(a,b)} \circ f_{(a',b')}(x) = I_{\mathbb{R}}(x)$ —— (1)

و

$f_{(a',b')} \circ f_{(a,b)}(x) = I_{\mathbb{R}}(x)$ —— (2)

حل المعادلة (1)

(1) $\Leftrightarrow f_{(a,b)}(a'x+b') = x$

$\Rightarrow a(a'x+b')+b = x$

$\Rightarrow \begin{cases} aa' = 1 \\ ab'+b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = \frac{1}{a} \\ b' = \frac{-b}{a} \end{cases}$ $(a \neq 0)$

حل المعادلة (2)

(2) $\Leftrightarrow f_{(a',b')}(ax+b) = x$

$\Rightarrow \begin{cases} a'a = 1 \\ a'b+b' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = \frac{1}{a} \\ b' = -a'b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = \frac{1}{a} \\ b' = \frac{-b}{a} \end{cases}$

ومنه نستنتج أن نظير $f_{(a,b)}$ هو $f_{(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})}$ من $Aff(\mathbb{R})$

أي لكل عنصر من $Aff(\mathbb{R})$ نظير بالنسبة للعملية "$\circ$"

ومنه نستنتج أن $(Aff(\mathbb{R}), \circ)$ زمرة غير تبديلية

② اثبات أن $T(\mathbb{R})$ زمرة جزئية

a) من أجل $b=0$ ($I_{\mathbb{R}} = f_{(1,0)} \in T(\mathbb{R})$

ومنه $T(\mathbb{R}) \neq \phi$ 1

b) ليكن $f_{(1,b)}$ و $f_{(1,c)}$ من $T(\mathbb{R})$ لدينا

$$f_{(1,b)} \circ f_{(1,-c)}(x) = f_{(1,b)}(x-c)$$

$$= (x-c) + b = x - c + b = f_{(1,-c+b)}(x)$$

ومنه $f_{(1,b)} \circ f_{(1,-c)} = f_{(1,-c+b)} \in T(\mathbb{R})$ 2

ومنه $T(\mathbb{R})$ زمرة جزئية من $Aff(\mathbb{R})$.