جامعة الوادي
كلية العلوم الدقيقة (قسم الرياضيات)

السنة الجامعية 2016\2017
13 ماي 2017

إمتحان الدورة العادية في مقرّر الحساب التفاضلي

المستوى : أولى ماستر — المدّة : 1 سا و 30 د

التمرين الأول: [7]

1. برهن أنّ العلاقة $xy - y\ln z + \sin(xz) = 0$ تعرّف في جوار مفتوح للنقطة $(0,2)$ من $\mathbb{R}^2$ تابع ضمني $(x,y) \longmapsto z = f(x,y)$ من الصنف C^1 يحقق $f(0,2) = 1$.
2. أحسب $Df(0,2)(h,k)$ حيث $(h,k) \in \mathbb{R}^2$.

التمرين الثاني: [5]

أوجد القيم القصوى للتابع $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ على المجموعة

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 1\}.$$

التمرين الثالث: [8]

نعتبر $E = C([0,1],\mathbb{R})$ الفضاء الشعاعي المؤلف من التوابع المستمرة من المجال $[0,1]$ نحو $\mathbb{R}$ مزوّد بنظيم الحد الأعلى $\|.\|_\infty$ (نذكّر أنّ $(E,\|.\|_\infty)$ فضاء لبناخ).
نعتبر كذلك $F = C_0^1([0,1],\mathbb{R})$ الفضاء الشعاعي المؤلف من التوابع من الصنف C^1 من $[0,1]$ نحو $\mathbb{R}$ و المعدومة عند 0 مزوّد بالنظيم $\|f\|_1 := \|f'\|_\infty$ (نقبل أنّ $\|.\|_1$ نظيم على F).

1. أثبت أنّ $(F,\|.\|_1)$ باناخي.
2. نعتبر $\varphi : F \longrightarrow E$ المعرّف بـ $\varphi(f) = f' + ff'$.
أثبت أنّ $\varphi \in C^1(F,E)$ و عيّن $D\varphi(f)$ من أجل كل $f \in F$.
3. أثبت أنّ φ تفاتشاكل على جوار مفتوح U_{0_F} لـ $0_F \in F$ نحو $\varphi(U_{0_F})$.

بالتوفيق.

سلم تصحيح امتحان الدورة العادية في مقرر الحساب التفاضلي
أولى ماستر رياضيات 2011 / 2012

التمرين الأول:

نضع $E=\mathbb{R}^2$ و $F=G=\mathbb{R}$ فضاءات باناخية، $U=\mathbb{R}^2$ مفتوح و $V=\mathbb{R}_+^*$ مفتوح من F (0.25) (0.25) (0.25)

$\forall (x,y,z)\in U\times V:\ h(x,y,z)=xy-y\ln z+\sin(xz)$ (0.25)

(0.25) $a=(0,2)\in U$, $b=1\in V$ (0.25)

التابع h من الصنف C^1 على $U\times V$ ويحقق $h(a,b)=0$ و $D_z h(a,b)\in Isom(\mathbb{R},\mathbb{R})$ لأن $\frac{\partial h}{\partial z}(0,2,1)=-2\neq 0$ (0.5) (0.5) (0.5)

اذن حسب نظرية التوابع الضمنية يوجد جوار مفتوح U_a في $\mathbb{R}^2$ للنقطة a وتابع وحيد $f:U_a\longrightarrow V$ من الصنف C^1 يحقق: $f(0,2)=1$ و $\forall (x,y)\in U_a: h(x,y,f(x,y))=0$ و (0.25) (0.25) (0.25) (0.25) (0.25)

$\forall (x,y)\in U_a:\ Df(x,y)=-\left(D_z h(x,y,f(x,y))\right)^{-1}\circ D_{(x,y)}h(x,y,f(x,y))$.

2. حساب $Df(0,2)(h,k)$:

(1) $D_{(x,y)}h(0,2,1):\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R},\ (h,k)\longmapsto 3h$

(0.5) $D_z h(0,2,1):\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ l\longmapsto -2l$

(0.5) $\left(D_z h(0,2,1)\right)^{-1}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ l\longmapsto -\frac{l}{2}$

(1) $Df(0,2)(h,k)=-\left(-\frac{3h}{2}\right)=\frac{3}{2}h\quad \forall (h,k)\in\mathbb{R}^2$.

التمرين الثاني: القيد معطى $x+y+z=1$ ومنه $z=1-x-y$.

$f(x,y,z)=f(x,y,1-x-y)=xy+(x+y)(1-x-y)$ (0.5)
$=h(x,y)$

لدينا $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=-2x-y+1$, $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=-2y-x+1$

النقطة الحرجة الوحيدة لـ h هي $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. (2)

(0.1) $H_{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$ $\quad \Delta_1=-2<0,\ \Delta_2=3>0$
سالبة تماما (0.1)

اذن $h\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ قيمة عظمى لـ h، بالتعويض في القيد نجد $z=\frac{1}{3}$ (0.1)
ومنه $f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$ قيمة عظمى لـ f. (0.2) (0.1)

التمرين الثالث:

1. لتكن $(f_n)_n$ متتالية كوشية في $(F,\|\cdot\|_1)$ ومنه $(f'_n)_n$ متتالية كوشية في $(E,\|\cdot\|_\infty)$ التام، اذن يوجد $g\in E$ بحيث

$$f'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(E,\|\cdot\|_\infty)} g .$$ (1,5)

بما أن $f_n(0)=0$ يمكن وضع $\forall x\in[0,1]: f_n(x)=\int_0^x f'_n(t)\,dt$

ومنه يمكن تعريف التابع $\forall x\in[0,1]: f(x)=\int_0^x g(t)\,dt$.

التابع f من الصنف C^1 على $[0,1]$ ويحقق $f(0)=0$ أي $f\in F$

و $\|f_n-f\|_1=\|f'_n-g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ أي

$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(F,\|\cdot\|_1)} f$ اذن $(F,\|\cdot\|_1)$ تام.

2. لتكن $f\in F$ ونثبت أن φ قابل للمفاضلة عند f.

$$\varphi(f+h)-\varphi(f) = h' + fh' + hf' + hh'$$ (0,25)

نضع $\forall h\in F: \quad D\varphi(f)(h)=h'+fh'+hf'$ (0,25)

$o(h)=hh'$ (0,25)

• $D\varphi(f)$ خطي. (0,25)

• $D\varphi(f)$ مستمر:

$$\forall h\in F: \quad \|D\varphi(f)(h)\|_\infty = \|h'+fh'+hf'\|_\infty$$

$$\le \|h'\|_\infty+\|f\|_\infty\|h'\|_\infty + \sup_{x\in[0,1]}\left|\int_0^x h'(t)\,dt\right| \|f'\|_\infty$$

$$\le \|h'\|_\infty+\|f\|_\infty\|h'\|_\infty+\|h'\|_\infty\|f'\|_\infty$$ (0,75)

$$\le \underbrace{(1+\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty)}_{C}\|h\|_1 .$$

اذن $D\varphi(f)$ مستمر من F نحو E.

لدينا: $\lim_{\|h\|_1\to 0} \frac{\|o(h)\|_\infty}{\|h\|_1}=0$.

$$0\le \frac{\|o(h)\|_\infty}{\|h\|_1} \le \frac{\|h\|_\infty\|h'\|_\infty}{\|h\|_1} = \frac{\|h\|_1 \sup_{x\in[0,1]}\left|\int_0^x h'(t)\,dt\right|}{\|h\|_1}$$ (0,75)

$$\le \frac{\|h\|_1^2}{\|h\|_1} = \|h\|_1 \xrightarrow[\|h\|_1\to 0]{} 0 .$$

ب) $D\varphi$ مستمر: $D\varphi : F \longrightarrow \mathcal{L}(F,E)$

$$\forall f,g\in F: \|D\varphi(g)-D\varphi(f)\|_{\mathcal{L}(F,E)} = \sup_{\|h\|_1\le 1} \|(g-f)h' + h(g'-f')\|_\infty$$

(1)

$$\le \sup_{\|h\|_1\le 1}\{\|h'\|_\infty\|g-f\|_\infty + \|h\|_\infty \|g'-f'\|_\infty\}$$

$$\le \sup_{\|h\|_1\le 1}\{\|h\|_1\|g-f\|_1 + \|h\|_1\|g-f\|_1\}$$ الفكرة مذكورة في ما سبق.

$$\le 2\|g-f\|_1.$$

أي أن $D\varphi$ تطبيق ليبشيتزي فهو مستمر.

خلاصة: $\varphi\in C^1(F,E)$.

ج. لدينا F و E باناخيان (0,25)، $U=F$ (0,25) مفتوح و $\varphi: F\longrightarrow E$ من الصنف C^1 (0,25) حسب السؤال الثاني و $D\varphi(0_F): F\to E,\ h\longmapsto h'$.

• (0,25) إن $D\varphi(0_F)$ خطي ومستمر.

• (0,5) $D\varphi(0_F)$ متباين: ليكن $h,k\in F$ حيث $h'=k'$ ومنه $\int_0^x h'(t)dt = \int_0^x k'(t)dt$ ؛ $\forall x\in[0,1]$

وبما أن $h(0)=k(0)=0$ ينتج $h=k$ إذن $D\varphi(0_F)$ متباين.

• (0,5) $D\varphi(0_F)$ غامر: ليكن $k\in E$، نبحث عن $h\in F$ حيث $h'=k$. نضع $\forall x\in[0,1]: h(x)=\int_0^x k(t)dt$. بما أن k مستمر على المجال $[0,1]$ فإن h تابع من الصنف C^1 على $[0,1]$ ويحقق $h(0)=0$ إذن $h\in F$. لما كان $h'=k$ فإن $D\varphi(0_F)$ غامر وبالتالي تقابل من F نحو E.

• (0,5) بما أن F و E باناخيان فإن $(D\varphi(0_F))^{-1}$ مستمر (حسب نظرية باناخ).

خلاصة: $D\varphi(0_F)\in Iso(F,E)$.

حسب نظرية العكس المحلي يوجد جوار مفتوح V_{0_F} لـ 0_F حيث $\varphi: V_{0_F}\longrightarrow \varphi(V_{0_F})$ تفاشاكل. (0,25)

جامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي

كلية العلوم الدقيقة قسم الرياضيات	الاسم: اللقب:
امتحان السداسي الثاني لطلبة سنة أولى ماستر رياضيات في مقياس قانون العمل	العلامة /20

1- عرف قانون العمل (02 ن): هو مجموعة من القواعد القانونية التي تحكم وتنظم العلاقات الفردية والجماعية في العمل بين العمال الأجراء والهيئة المستخدمة لهم.

2- ماذا تسمي العلاقة بين العامل و الهيئة المستخدمة (01 ن): علاقة تعاقدية

3- لقد اقر قانون العمل عدة شروط يجب توافرها في العامل حددها (04 ن): 1. الجنسية الجزائرية 2. الأهلية القانونية بلوغ سن الرشد (19 سنة كاملة) والاستثناء 16 سنة بناء على رخصة من ولي أو وصيه الشرعي 3. التمتع بالحقوق المدنية والسياسية 4. التمتع بالكفاءة البدنية

4- حدد الوضعيات القانونية للموظف (05 ن): 1. وضعية القيام بالخدمة 2. وضعية الانتداب 3. وضعية خارج الإطار 4. وضعية الإحالة على الاستيداع 5. وضعية الخدمة الوطنية.

5- فرق بين الوضعية الثانية و الرابعة (04 ن):

الوضعية الثانية / الانتداب	الوضعية الرابعة الإحالة على الاستيداع
- يبقى الموظف مستفيد من حقوقه في الراتب الذي يتقاضاه من إدارته الأصلية أو الإدارة التي انتدب إليها - الأقدمية وفي الترقية في الدرجات وفي التقاعد.	- يتوقف راتب الموظف - ولا يستفيد من حقوقه في الأقدمية وفي الترقية في الدرجات وفي التقاعد. فهي عبارة عن إيقاف مؤقت لعلاقة العمل

6- كيف تنتهي العلاقة بين العامل و البيئة المستخدمة: الوفاة، التقاعد، الاستقالة، العزل أو التسريح، العجز الكامل عن العمل، انقضاء أجل عقد العمل ذي المدة المحدودة، إنهاء النشاط القانوني للهيئة المستخدمة، البطلان أو الإلغاء القانوني لعقد العمل.

بالتوفيق

أستاذة المقياس

Université Echahid Hamma Lakhdar
Faculté des Sciences Exacts
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2016/2017
Niveau : Première Année Master
Durée : 90 min

Examen de Théorie Spectrale

Exercice 1: (7pts)

On considère l'opérateur T défini par :

$$T : C[0,1] \to C[0,1], \quad Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

1. Montrer que l'opérateur T est borné. **(1.5pts)**
2. Calculer la norme de T. **(1.5pts)**
3. Montrer que T est compact. **(2pts)**
4. Déterminer l'adjoint de T. (on suppose que $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$) **(2pts)**

Exercice 2: (7pts)

Soit H est un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint

1) Montrer que $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$ et $\sigma_r(A) = \varnothing$. **(2pts)**
2) Supposons que $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $\beta \neq 0$
   a. Montre que $\|(A - \lambda I)x\| \geq |\beta|\|x\|$, pour tout $x \in H$. **(2pts)**
   b. Montre que $\mathrm{Im}(A - \lambda I)$ est fermée. **(1.5pts)**
   c. En déduire que $\sigma_c(A) \subset \mathbb{R}$. **(1.5pts)**

Exercice 3: (6pts)

Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$.

Montrer que :

1. Les opérateurs AB et BA ont même rayon spectrale. **(2pts)**
2. $\sigma(A - \lambda I) = \sigma(A) - \{\lambda\}$. **(2pts)**
3. $\sigma(AB) \cup \{0\} = \sigma(BA) \cup \{0\}$. **(2pts)**

BON TRAVAIL

1 année master
2016/2017

Correction d'examen de Théorie spectrale

Messaoud Guesba

Ex n° 1 (7 pts)

1) On a $Tf(x) = \left|\int_0^x f(t)\,dt\right|$, $\forall f \in C[0,1]$

$$\leq \int_0^x |f(t)|\,dt \leq \|f\|_\infty \quad (1{,}5p)$$

D'où $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ c'est-à-dire T est borné.

2) On a $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Donc $\|T\| \leq 1$ . . . $(*)$

D'autre part, on prend $g(x) = 1$, $\forall x \in [0,1]$.

$Tg(x) = \int_0^x dt = x$, $\|Tg\| = 1$. D'où $\|T\| \geq \|Tg\| = 1$ $(**)$

D'après $(*)$ et $(**)$ on trouve $\|T\| = 1$ (1,5p)

3) On utilise le théorème d'Arzela - Ascoli.

Soit $\overline{B}(0,1) = \{f \in C[0,1],\ \|f\| \leq 1\}$.

On va montrer que $T\overline{B}(0,1)$ est relativement compact dans $C[0,1]$.

i) On a $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ d'où $\|Tf\|_\infty \leq 1$

donc $T\overline{B}(0,1)$ est uniformément borné.

ii) $\forall x, y \in [0,1]$, on a $|Tf(y) - Tf(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right|$

$$\leq \int_x^y |f(t)|\,dt \leq |y-x|, \quad \forall f \in \overline{B}(0,1) \quad (1{,}5p)$$

Donc, l'ensemble $T\overline{B}(0,1)$ est relativement compact, d'où T est compact.

4) On a $\langle Tf, g\rangle = \int_0^1 \left\{\int_0^x f(t)\,dt\right\} \overline{g(x)}\,dx$

$= \int\int f(t)\overline{g(x)}\,dt\,dx = \int_0 \int_t f(t)\overline{g(x)}\,dx\,dt$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq x \leq$

$= \langle f(t), \int_t^1 g(x)\,dx \rangle$

Donc $T^* g(t) = \int_t^1 g(x)\,dx$, ou bien $T^* f(x) = \int_x^1 f(t)\,dt$

$\boxed{\text{Ex n}^\circ 2}$ (7pts)

1) $\ast$ Soit λ une valeur propre de T. Alors, pour $x \neq 0$.
$\langle Tx, x\rangle = \lambda \langle x, x\rangle$ donc $\lambda = \dfrac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \dfrac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2}$
$\in \mathbb{R}$. c'est-à-dire $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$. 1p

$\ast$ soit $\lambda \in \sigma_r(A)$ d'où $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*) = \sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$
donc $\lambda \in \sigma_p(A)$, ce qui est absurde car
$\sigma_r(A) \cap \sigma_p(A) = \phi$. Donc $\sigma_r(A) = \phi$. 1p

2) a) on a $\|(A - \lambda I)x\|^2 = \|A - (\alpha + i\beta)x\|^2$
$= \langle (A - \alpha I)x - i\beta x, (A - \alpha I)x - i\beta x\rangle$
$= \|(A - \alpha I)x\|^2 + \|\beta x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle A - \alpha I)x, -i\beta x\rangle$ $\nearrow 0$

D'où $\|(A - \lambda I)x\| \geq |\beta|\,\|x\|$. $(\ast)$ 2p

b) considérons $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathrm{Im}(A - \lambda I)$,
et soit x sa limite dans H. pour chaque n, il existe $y_n \in H$
tel que $x_n = (A - \lambda I)y_n$ et par $(\ast)$ on trouve
$\|x_n - x_m\| = \|(A - \lambda I)(y_n - y_m)\| \geq |\beta|\,\|y_n - y_m\|$
D'où (y_n) est une suite de Cauchy, elle est donc convergente,
soit y sa limite, par continuité de $(A - \lambda I)$ il suit
$x = (A - \lambda I)y \in \mathrm{Im}(A - \lambda I)$. 1,5p

c) On a $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $\beta \neq 0$. On suppose $\lambda \in \sigma_c(A)$

d'où $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est donc incompatible avec $\lambda \in \sigma_c(A)$

i.e $\sigma_c(A) \subset \mathbb{R}$. (1,5 p)

$\boxed{\text{Ex n}^\circ 3}$ (6 pts)

1) On remarque que $(AB)^n = A(BA)^{n-1}B$ donc

$$\|(AB)^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|A\|^{\frac{1}{n}} \|(BA)^{n-1}\|^{\frac{1}{n}} \|B\|^{\frac{1}{n}}$$

En faisant $n \to +\infty$, on trouve $r(AB) \leq r(BA)$. (2 p)

On prouve l'autre inégalité en échangeant les rôles de A et B.

2) On montre que $\sigma(A - \lambda I) \subseteq \sigma(A) - \{\lambda\}$.

Soit $z \in \sigma(A - \lambda I)$, d'où $A - (\lambda + z)I$ n'est pas inversible

et ~~comme~~ donc $\lambda + z \in \sigma(A)$ c'est-à-dire

$z \in \sigma(A) - \{\lambda\}$. (2 p)

L'inclusion inverse se démontre de manière analogue.

3) Soit $\lambda \in \rho(BA)$. Alors on peut écrire

$$(\lambda I - AB)\left[I + A(\lambda I - BA)^{-1}B\right] = \lambda I$$

$$\left[I + A(\lambda I - BA)^{-1}B\right]\left[\lambda I - AB\right] = \lambda I.$$

Si $\lambda \neq 0$, donc $\lambda I - AB$ est inversible d'où $\lambda \in \rho(AB)$

c'est-à-dire $\rho(BA) \setminus \{0\} \subseteq \rho(AB)$ et donc

$\rho(BA) \cup \{0\} \subseteq \rho(BA) \cup \{0\}$. (2 p)

L'inclusion inverse est obtenue en intervertissant A et B.

Université Echahid Hamma-Lakhdar, El Oued

Faculté des sciences exactes

Département de Mathématiques

English Exam for 1st math Master class

Nom et prénom :..

Code

Exercise 1 : (10 points) Link each expression with its French translation

Closed set
Ring
Power
Neighborhood
Integer
a times b
a over b
a mines b
Sequence
Square root
Radius
Linear space
increasing
decreasing
Bounded set
Countable set
Closed ball
Inner product
Product space
Digit

Voisinage
Anneau
Decroissante
Espace vectorial
Espace produit
a /b
croissante
Chiffre
a ×b
Boule fermé
Ensemble borné
a -b
puissance
entier
Ensemble dénombrable
Racine carré
Rayon
Ensemble fermé
suite
Produit scalaire

Exercise 2: (5 points) Fill the gaps with a word from the list

ball , said, such, open, each , any , center, included, exists, only.

A non-empty set Ω of a topologic space is said.. to be .open if and ..only if for ..any.. element x of Ω there ..exists an open ball.... $B_o(x, \rho)$ with center in x and radius ρ, such.. that $B_o(x, \rho)$ is included in Ω. In other word, Ω is a neighborhood of each. of its element.

Exercice 3: (5 points) Traduire en Anglais:

1) Une suite convergente est bornée.

....A...convergante.sequance..is.bounded

2) La valeur absolue d'un nombre réel est toujours positive.

The..absolute.value..of..a.real..number..is.always positive

3) Un espace de Banach est un espace normé complet.

..A.Banach..space..is..a..complete..normed space

4) Un espace vectoriel est muni de deux opérations, addition et multiplication avec des scalaires.

..An..linear..space...is..equipped..with..two..operations
addition...and...multiplication..with.scalars.

Good luck

Contrôle Outils informatiques

Questions du cours (08 pts)

1) Quelle est le rôle des fonctions : **whattype, convert, collect, expand**? **(02 Points)**

2) Quand utilise t'on les instructions suivantes : **While** et **For**? **(02 Points)**

3) Quelle est la différence entre une procédure normale et une procédure récursive? **(02 Points)**

4) Quand utilise t'on les instructions suivantes : **ERROR** et **RETURN**? **(02 Points)**

Exercice N° 1 (06 pts)

Donnez le code d'une procédure Maple qui permet de retourner une liste **L2** des nombres premiers à partir d'une liste d'entiers donnée **L1**. Utiliser la fonction ***Isprime(N)*** : retourne vrai si N est un nombre premier, et faux sinon.

Exercice N° 2 (06 pts)

Deux nombres entiers **n** et **m** sont qualifies d'**amis**, si la somme des diviseurs de **n** est égale à **m** et la somme des diviseurs de **m** est égale à **n** (**on ne compte pas comme diviseur le nombre lui même et** 1).

Exemple : les nombres **48** et **75** sont deux nombres amis puisque :

- Les diviseurs de **48** sont : 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 et
  $2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 + 16 + 24 = 75$
- Les diviseurs de **75** sont : 3, 5, 15, 25 et $3 + 5 + 15 + 25 = 48$.

Donnez une procédure Maple qui permet de déterminer si deux entiers **n** et **m** sont amis ou non.

Bon courage **Bonne chance**

Corrigé Type du Contrôle Outils informatiques

Questions du cours (08 pts)

Q-1) Quelle est le rôle des fonctions : **whattype, convert, collect, expand**? **(02 Points)**

R-1)

a) whattype : donne le type d'une expression.

a) convert: La commande convert effectue deux genres de conversions:

i) d'un type de structure de donnees a un autre

ii) d'une forme d'expression a une autre

Q-2) Quand utilise t'on les instructions suivantes : **While** et **For**? **(02 Points)**

R-2) For est utilisée quand le nombre d'itération est connu. Par contre, **While** est utilisée quand le nombre d'itération est inconnu.

Q-3) Quelle est la différence entre une procédure normale et une procédure récursive? **(02 Points)**

R-3) La différence est qu'une procédure récursive s'appelle elle-même.

Q-4) Quand utilise t'on les instructions suivantes : **ERROR** et **RETURN**? **(02 Points)**

R-4) La commande RETURN(x) insérée dans une procédure termine l'exécution de la procédure et désigne x comme valeur de retour. Autant que, la commande ERROR(message) interrompt l'exécution de la procédure et affiche le message
fourni en interdisant toute valeur de retour de la procédure.

Exercice N° 1 (06 pts)

Donnez le code d'une procédure Maple qui permet de retourner une liste **L2** des nombres premiers à partir d'une liste d'entiers donnée **L1**. Utiliser la fonction ***Isprime(N)*** : retourne vrai si N est un nombre premier, et faux sinon.

Solution :

```
nbr_prem :=proc (liste_nombre)
              local nouvelle_liste, longueur, i ;
              nouvelle_liste := NULL ;
              longueur := nops(liste) ;
              for i from 1 to longueur do
                if isprime(liste[i]) then
                  nouvelle_liste:=nouvelle_liste,liste[i] ;
```

```
                end if;
              od ;
[nouvelle_liste] ;
end proc;
```

Exercice N°2 (06 pts)

Deux nombres entiers **n** et **m** sont qualifies d'**amis**, si la somme des diviseurs de **n** est égale à **m** et la somme des diviseurs de **m** est égale à **n** (**on ne compte pas comme diviseur le nombre lui même et 1**).

Exemple : les nombres **48** et **75** sont deux nombres amis puisque :

- Les diviseurs de **48** sont : 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 et
  2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 + 16 + 24 = **75**
- Les diviseurs de **75** sont : 3, 5, 15, 25 et 3 + 5 + 15 + 25 = **48**.

Donnez une procédure Maple qui permet de déterminer si deux entiers **n** et **m** sont amis ou non.

Solution :

```
nbr_amis :=proc (n,m)
              local S1, S2, i ;
              S1 :=0 ; S2 := 0 ;

              for i from 2 to n/2 do
                if (irem(n,i)=0) then
                  S1:=S1+i ;
                end if;
              od;

              for i from 2 to m/2 do
                if (irem(m,i)=0) then
                  S2:=S2+i ;
                end if;
              od;


              if((S1=m)and(S2=n))then
                 print('n et m sont amis') ;
              else
                 print('n et m ne sont pas amis ');
              end if;

end proc;
```

Université Echahid Hamma Lakhdar - El-Oued
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

14-05-2017

1ère Année Master (Mathématiques Appliquées)

Analyse fonctionnelle appliquée

Examen (corrigé)

Exercice 1 (6 points)
Soit un ouvert borné assez régulière $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de frontière Γ.

1. Donner les définitions de
   1 (a) l'espace de Sobolev $H^k(\Omega)$ (pour un entier $k \geqslant 1$),
   1 (b) l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$,
   1 (c) l'application trace γ_0 (dans $H^1(\Omega)$).
2. 1 Donner au moins deux propriétés (importantes) de γ_0.
3. Soit $f \in L^2(\Omega)$. Considérons le problème aux limites

$$(P)\quad \begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma. \end{cases}$$

   1 (i) Donner la définition d'une solution faible u du problème (P).
   1 (ii) Est-ce que la solution faible u est solution d'un problème de minimisation? Si la réponse est "oui", pourquoi et lequel ?

Solution :

1.
   (a) $H^k(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega),\ \partial^\alpha v \in L^2(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leqslant k\}$, où la dérivation ∂^α est au sens des distributions, muni du produit scalaire, $\langle u, v\rangle := \int_\Omega \big(\sum_{0<|\alpha|\leq k} \partial^\alpha u\, \partial^\alpha v\big) dx + \int_\Omega u\, v\, dx$.
   (b) $H_0^1(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$: l'adhérence dans $H^1(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$, ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact dans Ω (fonctions "test" sur Ω).
   (c) L'application trace γ_0 est une application de $H^1(\Omega)$ à valeurs dans $L^2(\Gamma)$, définie par $\forall v \in H^1(\Omega)$, $\gamma_0(v) := v_{|\Gamma}$.
2. L'application γ_0 est **linéaire**, **continue**, et à **image** $\gamma_0(H^1(\Omega)) = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ **dense dans** $L^2(\Gamma)$.
3.
   (i) On dit que u est une solution faible du problème (P), si u est solution du problème variationnel

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \quad \text{et vérifie} \\ \int_\Omega \big(\sum_{i=1}^N \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\big) dx = \int_\Omega f(x)\, v(x) dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

   (ii) Puisque la forme bilinéaire $a(u,v) := \int_\Omega \big(\sum_{i=1}^N \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\big) dx$ est symétrique, alors la solution faible u est aussi une solution du problème de minimisation

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega), \quad \text{tel que} \\ J(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v), \end{cases}$$

   où $J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme (fonctionnelle) quadratique définie pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ par

$$J(v) := \frac{1}{2} a(v,v) - \int_\Omega f(x)\, v(x) dx.$$

Exercice 2 (7 points)
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné à frontière Γ "assez régulière", $f \in L^2(\Omega)$, et un champ vectoriel $q(x) = (q_1(x), \ldots, q_N(x))$ pour $x \in \overline{\Omega}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{\Omega}$ (à divergence non nécessairement nulle sur Ω : $div(q) \neq 0$).
Considérons le problème aux limites suivant

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u(x) + q(x).\nabla u(x) = f(x), & pour\ x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & pour\ x \in \Gamma. \end{cases}$$

où les opérateurs Δ et ∇ sont respectivement le laplacien et le gradient.

3 1. Donner une formulation variationnelle (qu'on notera (P_{var})) au problème (P).

2 2. Montrer que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\left| \int_\Omega (q(x).\nabla v(x)) v(x) dx \right| \leqslant \sqrt{N}\, C_\Omega \|q\| \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}{}^1,$$

où C_Ω est la constante de l'inégalité de Poincaré, et $\|q\| = sup\{|q_i(x)|,\ x \in \overline{\Omega}, i = 1, \ldots, N\}$.

2 3. Donner une condition sur $\|q\|$, pour que le problème variationnel (P_{var}) soit bien posé.[2]

Solution :

1.

$$(P_{var}) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega), \quad \text{tel que} \\ a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

où $a(.,.) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est la forme bilinéaire définie par

$$\forall (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) := \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^N \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\Big) dx + \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^N q_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\Big) v(x) dx,$$

et $L : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est la forme linéaire définie pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ par $L(v) := \int_\Omega f(x)\, v(x) dx$.

2. Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\left| \int_\Omega (q(x).\nabla v(x)) v(x) dx \right| \underset{Cauchy-Schwarz}{\leqslant} \sqrt{N} \|q\| \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \underset{Poincaré}{\leqslant} \sqrt{N}\, C_\Omega \|q\| \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

3. Pour que le problème (P_{var}) soit bien posé, il suffit de satisfaire les hypothèses du théorème de Lax-Milgram. L'espace $H_0^1(\Omega)$ étant muni de la norme $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ est un espace de Hilbert, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et l'inégalité de Poincaré on arrive facilement à montrer que les formes $a(.,.)$ et L sont continues.

Pour que $a(.,.)$ soit coercive, il suffit de poser la condition $\boxed{\sqrt{N}\, C_\Omega \|q\| < 1}$. Ainsi, d'après l'inégalité de la question 2., pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$a(v, v) = \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega (q(x).\nabla v(x)) v(x) dx \geqslant \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \sqrt{N}\, C_\Omega \|q\| \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Donc, en posant $\alpha = (1 - \sqrt{N}\, C_\Omega \|q\|) > 0$, on a bien : $a(v, v) \geqslant \alpha \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$. Toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont ainsi vérifiées, on peut donc l'appliquer, et par conséquent le problème variationnel (P_{var}) est bien posé.

---

[1] $\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\right)^2 dx$. Indication : pour tout ensemble de réels $a_1, \ldots, a_N$ on a $\left(\sum_{i=1}^N a_i\right)^2 \leqslant N \sum_{i=1}^N a_i^2$.

[2] Une condition qui ne dépend que de Ω et N, et indépendante de la valeur de $div(q)$.

Exercice 3 (7 points)
Soit Ω un ouvert connexe borné, et à frontière Γ "assez régulière" dans $\mathbb{R}^N$.

Pour $(u,v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, on définit $a(u,v) := \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx + \left(\int_\Omega u(x)dx\right)\left(\int_\Omega v(x)dx\right)$.

2 1. Montrer que $a(.,.)$ est une forme bilinéaire coercive ($H^1(\Omega)$−elliptique)[3].

1,5 2. En déduire que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une solution unique $u \in H^1(\Omega)$ du problème

$$(P) \qquad a(u,v) = \int_\Omega fv dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

1 3. Montrer que si u est la solution de (P) alors on a : $\displaystyle\int_\Omega u(x)dx = \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega f(x)dx.$

2,5 4. En supposant que f est "assez régulière" et que $\int_\Omega f(x)dx = 0$, quel est le problème aux limites vérifié (au moins formellement) par u?

Solution :

1. La bilinéarité de la forme $a(.,.) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est facile à montrer. Ce qu'il faut aussi remarquer, c'est qu'elle est continue, puisque pour tout $(u,v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ on a

$$|a(u,v)| \leqslant \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \mu(\Omega)\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \max\{1, \mu(\Omega)\}\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Pour que $a(.,.)$ soit coercive sur $H^1(\Omega)$, il faut qu'il existe une constante $\alpha > 0$, telle que

$$a(v,v) \geqslant \alpha\|v\|^2_{H^1(\Omega)}, \ \forall v \in H^1(\Omega).$$

Autrement dit, il existe une constante $C > 0$ ($C = \frac{1}{\alpha}$), telle que

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant C a(v,v), \ \forall v \in H^1(\Omega).$$

Supposons le contraire : il existe alors une suite (d'éléments non nuls) $\{v_n\}_{n\geqslant 1}$ dans $H^1(\Omega)$ telle que

$$\|v_n\|^2_{H^1(\Omega)} > n\, a(v_n, v_n), \ \forall n \geqslant 1 \qquad (\bigstar).$$

Sans nuire à la généralité, on peut supposer que $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$, $\forall n \geqslant 1$ (sinon on passe à la suite $\frac{v_n}{\|v_n\|_{H^1(\Omega)}}$). Ainsi, on a

$$\|v_n\|^2_{H^1(\Omega)} > n\left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial v_n(x)}{\partial x_i}\right|^2 dx + \left(\int_\Omega v_n(x)dx\right)^2\right) = n\left(\|\nabla v_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\int_\Omega v_n(x)dx\right)^2\right), \ \forall n \geqslant 1.$$

La suite $\{v_n\}_{n\geqslant 1}$ étant bornée dans $H^1(\Omega)$, d'après le théorème de Rellich, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe $v \in L^2(\Omega)$, tel que

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v, \text{ dans } L^2(\Omega).$$

D'autre part, d'après $(\bigstar)$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} a(v_n, v_n) = 0$. Ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|\nabla v_n\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$.
Par conséquent, $\{v_n\}_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. Il s'ensuit que $v \in H^1(\Omega)$, et que

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v, \text{ dans } H^1(\Omega), \text{ avec de plus } \|v\|_{H^1(\Omega)} = 1.$$

Ainsi, la forme $a(.,.)$ étant continue sur $H^1(\Omega)$, on a

$$\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\int_\Omega v(x)dx\right)^2 = a(v,v) = \lim_{n\to+\infty} a(v_n, v_n) = 0$$

Autrement dit, on a

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ et } \int_\Omega v(x)dx = 0.$$

Puisque Ω est connexe, la fonction v est constante avec une intégrale nulle, donc v est nulle sur Ω. Ceci est en contradiction avec $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$. Donc, $a(.,.)$ est bien une forme coercive sur $H^1(\Omega)$.

[3] Supposer le contraire, et utiliser le théorème de Rellich.

2. Puisque la forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue et coercive sur $H^1(\Omega)$, il suffit de montrer que la forme linéaire $H^1(\Omega) \ni v \longmapsto \int_\Omega fv dx \in \mathbb{R}$ est continue, l'existence et l'unicité de la solution de (P) $u \in H^1(\Omega)$ est ainsi une conséquence directe du théorème de Lax-Milgram.

En effet, Ω étant borné, en appliquant premièrement l'inégalité de Cauchy-Schwarz, à $f \in L^2(\Omega)$, et en appliquant ensuite l'inégalité de Poincaré, on obtient pour tout $v \in H^1(\Omega)$

$$\left|\int_\Omega f(x)v(x)dx\right| \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Autrement dit, la forme linéaire $H^1(\Omega) \ni v \longmapsto \int_\Omega fv dx \in \mathbb{R}$ est bornée, donc elle est continue.

3. La fonction constante $\mathrm{v} \equiv 1$ est bien un élément de $H^1(\Omega)$, donc

$$\mu(\Omega)\int_\Omega u(x)dx = a(u, \mathrm{v}) = \int_\Omega f(x)dx.$$

4. D'après la question précédente, si $\int_\Omega f(x)dx = 0$, on a aussi $\boxed{\int_\Omega u(x)dx = 0}$. Ainsi, on a

$$a(u, \varphi) = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx = \int_\Omega f\varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)(\subset H^1(\Omega)).$$

Autrement dit, on a : $\boxed{-\Delta u = f \text{ dans } \Omega}$ au sens des distributions ($-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$). Plus généralement en prenant $v \in H^1(\Omega)$ et en appliquant la formule de Green, on obtient

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\gamma_0(v)d\sigma = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Puisque $\gamma_0(H^1(\Omega))$ est dense dans $L^2(\Gamma)$, on en déduit que $\boxed{\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma}$.

Tenant compte d'une régularité suffisante de la fonction f, la solution u vérifie le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{sur } \Gamma, \\ \int_\Omega u(x)dx = 0. \end{cases}$$

Ex1 :

1) $u = x - X = \begin{pmatrix} x_1 - X_1 \\ x_2 - X_2 \\ x_3 - X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(18t + 6tX_2) \\ \frac{1}{2}(14t + 2tX_2) \\ 2t^2 \end{pmatrix}$

déplacement

la vitesse $v = \frac{\partial u}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} + \frac{3}{2}X_2 \\ \frac{7}{2} + \frac{1}{2}X_2 \\ 4t \end{pmatrix}$

l'accélération : $\frac{\partial v}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2) le tenseur $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$.

$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0$, $\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 = \varepsilon_{33}$

$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + 0\right) = \frac{3}{4}$

$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) = 0$

$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) = 0 \Rightarrow \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ex2 : calculer :

a) $a_{ik} a_{jl} \delta_{kl} = a_{ik} a_{jk} \delta_{kk} = a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$

b) $\varepsilon_{ijk} a_{jk} = \left(\varepsilon_{1jk} a_{jk}, \varepsilon_{2jk} a_{jk}, \varepsilon_{3jk} a_{jk}\right)$

$= \left(\varepsilon_{123} a_{23} + \varepsilon_{132} a_{32}, \varepsilon_{213} a_{13} + \varepsilon_{231} a_{31}, \varepsilon_{312} a_{12} + \varepsilon_{321} a_{21}\right)$

$= \left(a_{23} - a_{32}, a_{31} - a_{13}, a_{12} - a_{21}\right)$

Ex 3 :

1) détermination de T : $T.\vec{U} = \vec{A}$, $T\vec{V} = \vec{B}$, $T\vec{W} = \vec{C}$

$$T.\vec{U} = A \iff \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{12} + T_{13} \\ T_{22} + T_{23} \\ T_{32} + T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b \\ a+b+c \\ a+b+c \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

$$T.V = B = \begin{bmatrix} -T_{11} - T_{13} \\ -T_{21} + T_{23} \\ -T_{31} + T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+c-2a \\ -2c \\ a+c-b \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{---} (4) \\ \text{---} (5) \\ \text{---} (6) \end{matrix}$$

$$TW = \vec{C} \iff \begin{bmatrix} -T_{12} + T_{13} \\ -T_{22} + T_{23} \\ -T_{32} + T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c \\ b-c-a \\ a-b-c \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{---} (7) \\ \text{---} (8) \\ \text{---} (9) \end{matrix}$$

on obtient 9 équation à 9 inconnue dont la résolution donne :

$(1)+(7) \implies T_{13} = b+c$ $\quad$ $(1) \implies T_{12} = b-c$

$(2)+(8) \implies T_{23} = b-c$ $\quad$ $(2) \implies T_{22} = a$

$(3)+(9) \implies T_{33} = a$ $\quad$ $(3) \implies T_{32} = b+c$

$(4) \implies T_{11} = a$, $\quad$ $(5) \implies T_{21} = b+c$, $\quad$ $(6) \implies T_{31} = b-c$

on a donc finalement $[T] = \begin{bmatrix} a & b-c & b+c \\ b+c & a & b-c \\ b-c & b+c & a \end{bmatrix}$

b) Déterminer le tenseur symétrique D et le tenseur antisymé G : on, $T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix} ; \quad G = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = \begin{bmatrix} 0 & c & c \\ c & 0 & c \\ c & c & 0 \end{bmatrix}$$

c) $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = \frac{1}{4}\,(i-j)^2\,(j-k)^2\,(k-i)^2$

$= \frac{1}{4}\,(4\times 6) = 6.$ $\left[\begin{array}{l} \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1 \\ \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = -1 \end{array}\right]$

2)

$$d = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

a) Demontration que : $d = \varepsilon_{ijk}\, a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k}$

$d = \varepsilon_{1jk}\, a_{11}\, a_{2j}\, a_{3k} + \varepsilon_{2jk}\, a_{12}\, a_{2j}\, a_{3k} + \varepsilon_{3jk}\, a_{13}\, a_{2j}\, a_{3k}$

$= a_{11}\left(\varepsilon_{1jk}\, a_{2j}\, a_{3k}\right) + \left(\varepsilon_{2jk}\, a_{2j}\, a_{3k}\right) a_{12} + a_{13}\left(\varepsilon_{3jk}\, a_{2j}\, a_{3k}\right)$

Les termes entre parenthèses sont les déterminants d'ordre deux.

$$d = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

b) vérification $d = \frac{1}{6}\,\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn}\, a_{il}\, a_{jm}\, a_{kn}$

on : $\varepsilon_{lmn}\, a_{il}\, a_{jm}\, a_{kn} = \begin{cases} \det(a_{ij}) & \text{pour une permutation paire} \\ -\det(a_{ij}) & \text{" " impaire} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

$\Rightarrow \varepsilon_{lmn}\, a_{il}\, a_{jm}\, a_{kn} = \varepsilon_{ijk}\, \det(a_{ij})$

$\Rightarrow \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn}\, a_{il}\, a_{jm}\, a_{kn} = \varepsilon_{ijk}^2\, d = 6\, d$