جامعة الشهيد حمة لخضر – الوادي

السنة : الثانية رياضيات (السداسي الرابع) والإعلام الآلي

المقياس : تطبيقات الرياضيات في العلوم الأخرى

المدة: ساعة ونصف

كلية العلوم الدقيقة

قسم الرياضيات

السنة الجامعية: 2017/2016

امتحان الدورة العادية

التمرين الأول :(05 نقط) : أجب عما يلي باختصار

1. ماهي القيمة التنبؤية valeur prédictible لاختبار فحص مبكر عن الإصابة بمرض ما؟
2. ما الهدف من دراسة قانون مدة حياة بدون ذاكرة ؟ و ماهي خاصيته المميزة؟
3. طوّر الإنسان الرياضيات قديما تبعا لحاجياته اليومية .أذكر هذه الحاجيات وأقسام الرياضيات الثلاثة الناتجة عنها.

التمرين الثاني (05 نقط) : متحرك M في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ معرف بدلالة الزمن t بشعاع الانتقال $\overrightarrow{OM} = e^{t}\vec{i} + t\vec{j}$.

1. أكتب معادلة ديكارتيه لمسار المتحرك M.
2. أحسب $\varphi(x) = \int_{\ln\sqrt{3}}^{x} \sqrt{e^{2s}+1}\,ds$ (مساعدة : يمكن استخدام المتغير المساعد $e^{2s}+1 = r^2$).
3. أحسب المسافة التي يقطعها المتحرك بين اللحظتين الزمنيتين $t_1 = \ln\sqrt{63}$, $t_0 = \ln\sqrt{3}$ وسرعته في اللحظة t_1(وحدة الزمن هي الثانية ووحدة الطول هي المتر).

التمرين الثالث (04 نقط) :(n, e) يرمز المفتاح العام في نظام التشفير RSA. نفرض أن n=35

1. ماهي القيم الممكنة لـ e.
2. أحسب المفتاح الخاص d في حالة e=19.

التمرين الرابع: (06نقط): ورشة تفصيل وخياطة تنتج نوعين من الأقمصة تتطلب كل وحدة من النوع الأول 1متر من القماش و 4 ساعات عمل وتباع بـ24 (و.ن) أما الوحدة من النوع الثاني فتحتاج إلى مترين من القماش و 2 ساعة عمل وثمن بيعها 16(و.ن). علما أن الورشة تتوفر أسبوعيا فقط على 160متر من القماش و400 ساعة عمل .

1. لخص المعطيات في جدول مناسب ثم ضع المسألة في الشكل العام للبرمجة الخطية (دالة الهدف والقيود).
2. كم عدد الوحدات من كل نوع والتي على الورشة توفيرها أسبوعيا للحصول على أكبر فائدة علما أنها تبيع كل ما تنتجه.

التصحيح النموذجي لامتحان الدورة العادية

لمقياس : تطبيقات الرياضيات في العلوم الأخرى

المستوى: السنة الثانية رياضيات

السنة الجامعية 2017/2016

التمرين الأول (أسئلة حول الدروس):

1. القيمة التنبوية لاختبار فحص الكشف المبكر عن مرض هي : احتمال أن يكون شخص أظهر اختبارا إيجابيا مصابا به فعلا ---- (01 ن)
2. الهدف من دراسة قانون مدة حياة بدون ذاكرة هو التنبؤ بمدة حياة عنصر أو ظاهرة أي بعد كم من الوقت لم يعد هذا العنصر نشطا أو أن هذه الظاهرة قد توقفت. --- (01 ن)
خاصيته المميزة هي أن مدة الحياة لا تتعلق بما انقضى من الوقت أي $P(X \geq s+t / X \geq t) = P(X \geq s)$.---- (01 ن)
3. الحاجيات الأولية لإنسان التي دفعته لتطوير الرياضيات هي : الحسابات في المبادلات التجارية – قياس المقادير (أطوال – مساحات- أوزان...)- توقع الأحداث الفلكية . --- (01 ن)
أقسام الرياضيات الناتجة عنها هي: دراسة البنية (الأعداد والعمليات) – دراسة الفضاء- دراسة المتغيرات. --- (01 ن)

التمرين الثاني :

1. معادلة المسار : بما أن : $y(t) = t$ و $x(t) = e^t$ فإن $x = e^y$ ومنه $y = \ln x$. ---- (01 ن)
2. لحساب $\varphi(x)$ نعتبر المتغير المساعد $\sqrt{1+e^{2s}} = r$ فنجد $\varphi(x) = \int_{\ln\sqrt{3}}^{x} \sqrt{1+e^{2s}}\,ds = \int_{2}^{\sqrt{1+e^{2x}}} r.\frac{rdr}{r^2-1}$ وبالتالي

$$\int_{2}^{\sqrt{1+e^{2x}}} \frac{r^2dr}{r^2-1} = \int_{2}^{\sqrt{1+e^{2x}}} \left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r-1}-\frac{1}{r+1}\right)\right)dr$$ --- (01 ن)

$$= \left[r+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{r-1}{r+1}\right)\right]_2^{\sqrt{1+e^{2x}}} = \sqrt{1+e^{2x}} - 2 + \ln\sqrt{3} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}$$ (01 ن)

3. المسافة المقطوعة بين اللحظتين الزمنيتين $t_0 = \ln\sqrt{3}$ و $t_1 = \ln\sqrt{63}$ هي طول القوس $\overline{M(t_0)M(t_1)}$ من المسار أي

$$S = \int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{63}} \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt = \int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{63}} \sqrt{e^{2t}+1}\,dt$$ (01 ن)

إذا $$S = \varphi\left(\ln\sqrt{63}\right) = 6+\ln\sqrt{\frac{7}{3}} \quad (m)$$ ---- (0,5 ن)

سرعة المتحرك في اللحظة $t_1 = \ln\sqrt{63}$ هي $v\left(\ln\sqrt{63}\right) = \sqrt{e^{2\ln\sqrt{63}}+1} = 8(m/s)$. --- (0,5 ن)

التمرين الثالث:

1. قيم e (المفتاح العام) الممكنة في حالة $n = 35$: لدينا $n = 5\times 7$ وبالتالي $\varphi(n) = 4\times 6 = 24$ وبما أن $1 < e < 24$ وأولي مع 24 إذا $e \in \{5,7,11,13,17,19,23\}$. --- (01 ن) (01 ن)
2. تعيين المفتاح الخاص d في حالة e=19: d هو العدد الطبيعي الوحيد بحيث : $de \equiv 1[24]$ و $1 < d < 24$ --- (0,5 ن)
بما أن 19 و 24 أوليان فيما بينهما نبحث عن عددين صحيحين α, β بحيث $24\alpha + 19\beta = 1$.
لدينا $\begin{matrix} 24 = 19+5 \\ 19 = 4\times 5 - 1 \end{matrix}$ ومنه $\begin{matrix} 24-19 = 5 \\ 4\times 5 - 19 = 1 \end{matrix}$ إذا $4(24-19)-19 = 1$ أي $24(4)+19(-5) = 1$. (0,5 ن)
ومنه $19(-5) \equiv 1[24]$ لكن $-5 \equiv 19[24]$ ومنه $19.19 \equiv 1[24]$ أي أن $d = 19$ كذلك.
(01 ن)

التمرين الرابع :

1. تلخيص المعطيات في جدول

	طول القماش (بالمتر)	عدد ساعات العمل	ثمن بيع الوحدة (و.ن)
النوع الأول	1	4	24
النوع الثاني	2	2	16
الامكانيات المتاحة	160	400	

(0,5 ن)

صياغة المسألة في الشكل العام للبرمجة الخطية :

X = عدد الوحدات من النوع الأول. Y= عدد الوحدات من النوع الثاني.

المسألة تهدف إلى البحث عن X و Y للحصول على أكبر قيمة ممكنة لدالة الهدف (الفائدة) $Z = 24X + 16Y$ (0,5 ن)

ضمن القيود التالية :

$X + 2Y \leq 160......(1)$ (0,5 ن)

$4X + 2Y \leq 400.....(2)$ (0,5 ن)

$X \geq 0, Y \geq 0.........(3)$ (0,5 ن)

2. حساب X , Y للحصول على أكبر ربح أي تحقق $\max Z$:

نمثل في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق القيود الأربعة السابقة

(Δ_1) المستقيم ذو المعادلة $X + 2Y = 160$ وهو يشمل النقطتين

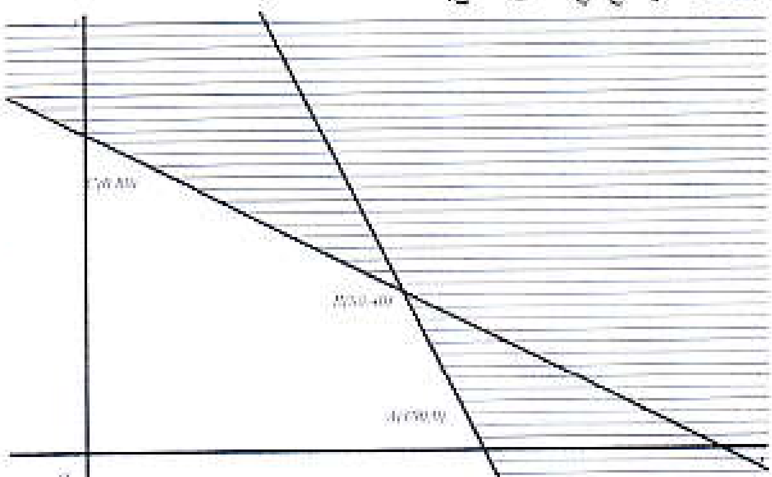
x	0	160
y	80	0

(0,5 ن)

(Δ_2) المستقيم ذو المعادلة $4X + 2Y = 400$ وهو يشمل النقطتين

x	0	100
y	200	0

المتراجحتان (1) و(2) محققتان من أجل النقطة $O(0,0)$ مبدأ المعلم ومنه يمكن تمثيل المنطقة المسموحة للحلول وهي الرباعي المحدب OABC الموضح في الشكل التالي. (0,5 ن)



(0,5 ن)

نجد احداثيات الرؤوس O,A ,B,C بحل ثنائيات جمل معادلتين من بين الأربعة المذكورة. (0,5 ن)

نحسب قيمة دالة الهدف من أجل احداثيات كل رأس فنجد

إحداثيات الرأس	O(0,0)	A(100,0)	B(80,40)	C(0,80)
Z=24X+16Y	0	2400	2560	1280

(1 ن)

ومنه تتحقق الفائدة العظمى من أجل X=80 و Y=40. (0,5 ن)

جامعة محمد الأخضر أحارة الوادي
كلية العلوم الدقيقة

قسم الرياضيات — مقياس : التحليل (4)
مستوى الثانية رياضيات — تاريخ الاجراء : 2017/05/13

التصحيح النموذجي لامتحان الدورة العادية رفقة سلم التنقيط

العلامة كاملة	العلامة أجزاء	التمرين الأول (07 نقاط)
01	0,5	1. نعلم أن $(\lvert x\rvert-\lvert y\rvert)^2 = x^2-2\lvert xy\rvert+y^2 \geq 0$ ومنه $\lvert xy\rvert \leq x^2-\lvert xy\rvert+y^2$
	0,5	لكن $\lvert xy\rvert \geq xy$ إذا $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \lvert xy\rvert \leq x^2-xy+y^2$
03,5		2. بتوظيف المتباينة نجد أن $\lvert f(x,y)\rvert \leq \lvert x\rvert^{p-1}\lvert y\rvert^{q-1}$
	0,5	الطرف الأيمن يؤول للصفر حينما $(x,y)\to(0,0)$ لما $p+q\geq 3$ (أي $p-1>0$ أو $q-1>0$)
	0,5×2	وبالتالي $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ إذا f مستمر عند $(0,0)$ لما $p+q\geq 3$
	0,5×2	لاحظ أن f غير مستمر عند $(0,0)$ لما $p+q=2$ لأنه $f(x,x) = 1 \underset{x\to 0}{\not\longrightarrow} 0$
	0,5	لكن f مستمر دوما لما $(x,y)\neq(0,0)$ ومنه الشرط الوحيد لاستمرارية f على $\mathbb{R}^2$ هو $p+q\geq 3$
01,5	0,5	3. إذا كان f قابلا للمفاضلة عند $(0,0)$ فإن $Df(0,0)(x,y)=x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$
	0,5×2	لكن $f(x,0)=f(0,y)=0$ ومنه $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ وبالتالي $Df(0,0)=0$
01	0,5	4. إذا كان f قابلا للمفاضلة عند $(0,0)$ فإنه حسب (3) $\frac{\lvert f(x,y)\rvert}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$
	0,5	باستعمال الاحداثيات القطبية : $r^{p+q-3}\cdot\left\lvert\frac{\cos^p\theta\cdot\sin^q\theta}{1-\cos\theta\sin\theta}\right\rvert \xrightarrow[r\to 0]{} 0$
		أي أن $p+q-3>0$ أو كذلك $p+q\geq 4$.
		ملاحظة : يمكن كذلك الاستعانة بالاحداثيات القطبية للاجابة عن السؤال الثاني.

كاملة	أجزاء	التمرين الثاني (06 نقاط)
02		1. إذا كان $(x,y,z)\in D$ فإن $f(x,y,z) = xy+(x+y)(1-x-y)$
	0,5	$= x-x^2+y-y^2-xy = g(x,y)$
	0,5	النقط الحرجة لـ f في D هي التي تحقق : $\frac{\partial g}{\partial x} = 1-2x-y=0$
	0,5	$\frac{\partial g}{\partial y} = 1-2y-x=0$
	0,5	بحل الجملة نجد $x=y=\frac{1}{3}$ ومنه $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ هي النقطة الحرجة الوحيدة من D للتابع f.

كاملة	مجزأة	تابع للتمرين الثاني
01,5	0,5×2	2. $H_g(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=\begin{pmatrix}-2&-1\\-1&-2\end{pmatrix}$ سالبة بقوة ومنه فإن،
	0,5	$f(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})=g(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=\frac{1}{3}$ هي قيمة عظمى محلية لـ f على المستوي D
0,5	0,5	3. بالنشر والتبسيط نتحقق من المساواة من أجل كل $(x,y,z)\in D$
		4. انطلاقا من المساواة 3 نجد أنه من أجل كل $(x,y,z)\in D$ فإن،
02,0	0,5	$f(x,y,z)=\frac{1}{3}-(3y-1)^2-\frac{1}{4}(2x+y-1)^2\leq\frac{1}{3}$
	0,5×3	وتتحقق المساواة أي $f(x,y,z)=\frac{1}{3}$ لما $3y-1=2x+y-1=0$ أي $x=y=\frac{1}{3}$ ومنه $z=\frac{1}{3}$

كاملة	مجزأة	التمرين الثالث (06 نقاط)
		1. ان $\Gamma=\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2 \,/\, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\}$
	0,5 0,5 0,5	وبالتالي التمثيل الوسيطي لـ Γ بالاحداثيات الناقصية $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$، $\begin{cases}x=a\cos t\\y=b\sin t\end{cases}$
03	0,5 0,5	ومنه فإن، $\begin{cases}dx=-a\sin t\,dt\\dy=b\cos t\,dt\end{cases}$ أي أن،
		$\int_\Gamma w=-a^2b^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cdot\cos t\,dt+2ab^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\cdot\sin t\,dt$
		باستعمال المساواتين، $\cos^2 t\cdot\sin t=\frac{\sin 3t}{4}+\frac{\sin t}{4}$
		و $\sin^3 t\cdot\cos t=-\frac{\sin 4t}{8}+\frac{\sin 2t}{4}$
	0,5	نجد أن، $I=-\frac{a^2b^2}{4}+\frac{2ab^2}{3}$
		2. ان w من الشكل: $P\,dx+Q\,dy$ وعليه حسب
		علاقة قرين - ريمان فإن،
03	0,5×2	$\int w=\iint_K\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=2\iint_K(y-xy)\,dx\,dy$
	0,5×2	باستعمال الاحداثيات الناقصية $x=ar\cos t\,,\ y=br\sin t$
	0,5+0,25×2	حيث $0\leq r\leq 1$ و $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$ و $dx\,dy=ab\,r\,dr\,d\theta$
		نجد أن، $2\iint_K(y-xy)\,dx\,dy=\frac{2ab^2}{3}-\frac{a^2b^2}{4}$
01	0,5×2	تنظيم الإجابة + خلوها من التشطيب

الحل النموذجي لاختبار الهندسة

التمرين الأول:

(0,5) α est un cercle $\Rightarrow \alpha(t) = r(\cos t, \sin t)$ 1)

$$\alpha'(t) = r(-\sin t, \cos t)$$

(0,5) $$\alpha''(t) = r(-\cos t, -\sin t)$$

(0,5) $$k(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}{r^3} = \boxed{\frac{1}{r}}$$

(0,5) α est un hélice $\Leftrightarrow \exists\, e\,(e^{t})$, $\langle T, e \rangle = \cos\theta = c^{te}$ 2)

par dérivation, on obtient

(0,5) $$\Rightarrow \langle T'_\alpha, e \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle k N_\alpha, e \rangle = 0$$

(0,5) $\Rightarrow N_\alpha \perp e$, donc α est faute

(0,5) S est un plan $\Rightarrow \forall w \in T_pS,\ S_p(w) = 0$ 3)

$$\Leftrightarrow L = \langle X_u, S_p(X_u) \rangle = 0$$

(0,5) $$M = \langle X_u, S_p(X_v) \rangle = 0$$

(0,5) $$N = \langle X_v, S_p(X_v) \rangle = 0$$

(0,5) $k_n = k \langle N_\alpha, N_p \rangle$, $N_p \perp N_\alpha \Rightarrow \boxed{k_n^p = 0}$ 4)

التمرين الثاني

$\|\alpha'\| = 1$, $\|\alpha\| = r$ 1)

$$\Rightarrow \|\alpha\|^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle = r^2$$

en dérivant, il devient

(0,5) $$\boxed{\langle \alpha', \alpha \rangle = 0}$$

Et par dérivation autre fois, on obtient

$$\langle \alpha'', \alpha \rangle + \langle \alpha', \alpha' \rangle = 0$$

(0,5) $$\Rightarrow \boxed{\langle \alpha, \alpha'' \rangle = -\langle \alpha', \alpha' \rangle = -1}$$

De même manière, en dérivant la dernière rélation, il déduit:

$$\langle \alpha, \alpha''' \rangle + \langle \alpha', \alpha'' \rangle = 0$$

mais $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 1 \Rightarrow 2\langle \alpha', \alpha'' \rangle = 0$, donc

(0.5) .... $\boxed{\langle \alpha, \alpha''' \rangle = 0}$

(0.5) .... $\alpha' = T$ 2)

(0.5) .... $\alpha'' = T' = k N$

$\alpha''' = k' N + k N' = k' N + k(-kT - \tau B)$

(0.5) .... $= -k^2 T + k' N - k\tau B$

(0.5) ...... $\alpha = aT + bN + cB$, $\langle \alpha, \alpha' \rangle = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$

(0.5) .... $\langle \alpha, \alpha'' \rangle = -1 \Rightarrow \boxed{b = -\frac{1}{k}}$

(0.5) ... $\langle \alpha, \alpha''' \rangle = 0 \Rightarrow c = -\frac{k'}{\tau k^2}$, donc:

$$\alpha = -\frac{1}{k} N - \frac{k'}{\tau k^2} B, \text{ alors:}$$

(1.5) ..... $\|\alpha\|^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle = \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{k'}{\tau k^2}\right)^2 = r^2$ 3)

en dérivant: $2\left(\frac{1}{k}\right)\left(-\frac{k'}{k^2}\right) + 2\left(\frac{k'}{\tau k^2}\right)\left(\frac{k'}{\tau k^2}\right)' = 0$ (4

$$\Rightarrow -\frac{k'}{k^2 \tau}\left(\frac{\tau}{k} - \left(\frac{k'}{\tau k^2}\right)'\right) = 0$$

(1) ...... $\Rightarrow \frac{\tau}{k} - \left(\frac{k'}{\tau k^2}\right)' = 0$

التمرين الثالث

1)

$X(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$

(0.5) ...... $X_u = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1)$

$X_v = (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0)$ $\Rightarrow X_u \wedge X_v$

(0.5) ... $\Rightarrow X_u \wedge X_v = \cosh u(-\cos v, -\sin v, \sinh u)$

... $X_u \wedge X_v = 0 \iff \begin{cases} \cos v = 0 \\ \sin v = 0 \\ \sinh u = 0 \end{cases}$ impossible, car les fonctions $t \mapsto \cos t$, $t \mapsto \sin t$ ne s'annullent jamais au même temps.

donc α est régulière.

(0,5) ...... $N_p = \frac{1}{ch u}(-\cos\theta, -\sin\theta, sh u)$

(1,5) .... $E = X_u^2 = ch^2 u, \quad G = X_\theta^2 = ch^2 u, \quad F = 0$ (2

$$A(D) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{EG - F^2}\, du\, d\theta = 2\pi \int_0^1 ch^2 u\, du$$ (3

(1,5)

$$= \boxed{\frac{\pi}{4}\left(e^2 - \frac{1}{e^2} + 2\right)}$$

(4

$X_{uu} = (ch u \cos\theta, ch u \sin\theta, 0)$

$X_{\theta\theta} = (-ch u \cos\theta, -ch u \sin\theta, 0)$ $\quad X_{u\theta} = (-sh u \sin\theta, sh u \cos\theta, 0)$

(0,5) ...... $L = \langle X_{uu}, N_p \rangle = -\cos^2\theta - \sin^2\theta = -1$

(0,5) ...... $M = \langle X_{u\theta}, N_p \rangle = 0,$

(0,5) .... $N = \langle X_{\theta\theta}, N_p \rangle = 1$

(0,5) .... $K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{ch^4 u}, \quad H = \frac{LG + EN - 2FM}{EG - F^2} = 0$

(0,5)

(On dit dans ce cas que S est une surfaces minimale)

$N_p = \frac{1}{\operatorname{ch} u}(-\cos\theta, -\sin\theta, \operatorname{sh} u)$

$E = X_u^2 = \operatorname{ch}^2 u$, $G = X_\theta^2 = \operatorname{ch}^2 u$, $F = 0$ (2

$$A(D) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{EG-F^2}\, du\, d\theta = 2\pi\int_0^1 \operatorname{ch}^2 u\, du$$ (3

$$= \boxed{\frac{\pi}{4}\left(e^2 - \frac{1}{e^2} + 2\right)}$$

(4

$X_{uu} = (\operatorname{ch} u\cos\theta, \operatorname{ch} u\sin\theta, 0)$

$X_{\theta\theta} = (-\operatorname{ch} u\cos\theta, -\operatorname{ch} u\sin\theta, 0)$ $X_{u\theta} = (-\operatorname{sh} u\sin\theta, \operatorname{sh} u\cos\theta, 0)$

$L = \langle X_{uu}, N_p\rangle = -\cos^2\theta - \sin^2\theta = -1$

$M = \langle X_{u\theta}, N_p\rangle = 0,$

$N = \langle X_{\theta\theta}, N_p\rangle = 1$

$K = \frac{EN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{\operatorname{ch}^4 u}$, $H = \frac{LG + EN - 2FM}{EG - F^2} = 0$

(On dit dans ce cas que S est une surface minimale)

UNIVERSITÉ HMMALAKHDER D'EOUED
INSTITUT SCIENCES EXACTE
CONTRÔLE EN ALGEBRE 4 — ANNÉE UNIVERS. 2016/2017
LE 6/05/20017. — DURE :1H.30

Exercice 1)[$2p$]

on définit l'application φ_a par : $\forall p \in E = \mathbb{R}_n[X]$ $\quad p_a(p)=p(\mathrm{a})+a\int_{-1}^{1} p(t)dt$.

Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_a \in E^*$.

Exercices 2) [$2p$]

La forme quadratique suivante définit-elle un produit scalaire dans l'espace euclidienne $\mathbb{R}^3$? .

$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_2$

Exercices 3) [$2p$]

Montrer que si H est un sous-espace vectoriel de E,

on a alors $H = \{0\}$ si et seulement si, $H^\perp = E^*$.

Exercice 4)[$3p$]

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1) Déterminer la forme quadratique q définir sur $\mathbb{R}^3(\mathbb{C})$ ayant pour matrice A dans la base canonique .

2) Déterminer une forme bilinéaire $\varphi_a(x, y)$.

Exercice 5)[$5p$]

Soit q la forme quadratique définie dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ par ;

$$q(x) = \sum_{1}^{n} x_i^2 - 2 \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} x_i x_j$$

1) Donner la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

2) Réduire q dans les cas $n = 3$.

3) Déterminer le rang et signature de q dans les cas $n = 3$.

Exercice 6)[$6p$]

Orthonormaliser la base $B = \{v_1 = t^2,\ v_2 = t\ , v_3 = 1\}$dans l'espace $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire suivant;

$< P, Q \geq= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$.

Bon chance. S.a.m

جامعة الشهيد حمة لخضر بالوادي

كلية العلوم الدقيقة

قسم الرياضيات

السنة الثانية

امتحان الرقابة التقليدية في « مقياس الاحتمالات »

التمرين الأول :(06 نقاط)

كرات لا نفرق بينها في الملمس عددها غير منته مرقمة 1، 2، .... توضع على التوالي في ثلاث علب باستقلالية و عشوائيا.

من اجل $k \geq 2$ نرمز ب A_k للحدث : علبتان من العلب الثلاث غير خالية للمرة الأولى من اجل وضع k كرة.

من اجل $l \geq 3$ نرمز ب B_l للحدث : العلب الثلاث غير خالية للمرة الأولى عند وضع l كرة.

1- احسب $P(B_l/A_k)$

2- استنتج $P(B_l)$ ثم $\sum_{l=3}^{\infty} P(B_l)$ و فسر النتيجة احتماليا.

التمرين الثاني :(07 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة ب :

$$f(x) = \begin{cases} -x\ln x \, ; x > 0 \\ 0 ; x = 0 \end{cases}$$

و لتكن X المتغير العشوائي المعرف على فضاء احتمالي في المجموعة المنتهية E ، نرمز ب N لعدد عناصرها .

تسمى انتروبي – مقياس لدرجة عشوائية نظام – العدد H (X) المعرف ب:

$$H(x) = \sum_{x \in E} f\big(P(X = x)\big)$$

1- حدد اشارة H (X)

2- احسب H (X) من اجل X ثابت

3- احسب : H (X) من اجل X يتبع التوزيع المنتظم على E

4- برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب :

$f(x) \leq 1 - x$ استنتج $\sum_{x \in E} f\big(NP(X = x)\big) \leq 0$ ثم اوجد حدا أعلى لـ H (X)

الحل النموذجي لامتحان الاحتمالات دورة ماي 2017

كاملة	مفصلة	الحل	التمرين
06	0,5 01 01 0,5 01 0,5 0,5 01	1) ... A_k ... التكرار k حتى B_ℓ يجب أن تكون ... موجودة في أول ... و التكرار ℓ ... في الرمية السابقة ... $P(B_\ell/A_k)=\left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-k-1}\cdot\frac{1}{3} \qquad (\ell>k)$ 2) بتطبيق نظرية الاحتمال الكلي ... $P(B_\ell)=\sum_{k=2}^{\ell-1}P(B_\ell/A_k)\,P(A_k)=\sum_{k=2}^{\ell-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-k-1}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ $=\left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-1}-2\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell-1}$ نتحقق أن $\sum_{\ell=3}^{\infty}P(B_\ell)=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right)-\frac{2}{9}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)=1$ نقول أنه شبه أكيد أن لا نبقى على اللانهاية وأن الحدث (B_ℓ) شبه تام	الأول
07	01 01 01 1,5 1,5 01	1- نعلم أن $x\in]0,1[$ ، $\ln x<0$ إذن $f(x)\geq 0$ وبما أن $f(0)=f(1)=0$ ومنه من أجل كل $x\in E$: $P(X=x)\in[0,1]$ و $f(x)\geq 0$ إذن $f(P(X=x))\geq 0$ نستنتج $H(X)\geq 0$ 2- إذا كان X ثابتة لوجد إذن $a\in E$ حيث $P(X=a)=1$ ومنه $H(X)=0$ لأن $x\in E\setminus\{a\}$: $P(X=x)=0$ و $f(0)=f(1)=0$ 3- $X\sim\mathcal{U}_E$ إذن $P(X=x)=\frac{1}{N}$ $\forall x\in E$ $f(P(X=x))=-\frac{1}{N}\ln\frac{1}{N}=\frac{\ln N}{N}\rightarrow H(X)=N\frac{\ln N}{N}=\ln N$ 4- من أجل $x\geq 0$ نستنتج : لدينا من أجل $x>0$ $g(x)=f(x)+x-1$ $g'(x)=-\ln x$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline g'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline g(x) & -1 & \nearrow & 0 & \searrow & \end{array}$ إذن $g(x)\leq 0$ وبالتالي $f(x)\leq 1-x$ لدينا من أجل $x\in E$: $f(NP(X=x))\leq 1-NP(X=x)$ ومنه $\sum_{x\in E}f(NP(X=x))\leq\sum_{x\in E}(1-NP(X=x))$ $\leq N-N\sum_{x\in E}P(X=x)$ إذن $\sum_{x\in E}f(NP(X=x))\leq N-N=0$ نلاحظ أن $f(NP(X=x))=-NP(X=x)\ln(NP(X=x))$ $=f(N)P(X=x)+Nf(P(X=x))$ $\sum f(NP(X=x))=f(N)+NH(X)\Rightarrow H(X)\leq-\frac{f(N)}{N}=\ln N$	الثاني

	0,5	[illegible]
	0,1	$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln x-1)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = 1$
07		$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ $\quad dy = \frac{dx}{x}$
	0,25	$F(x) = \int_0^x \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln t-1)^2} dt = \int_{-\infty}^{\ln x-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \phi(\ln x - 1)$
		$E(X) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln x-1)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} e^{y+1} dy$
	0,25	$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-1)^2} e^{\frac{3}{2}} dy = e^{\frac{3}{2}}$ $\quad Y \rightsquigarrow N(1,1)$
		$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(e^Y \leq x) = P(Y \leq \ln x) = F_Y(\ln x)$ من أجل $x>0$
	1,5	$g(x) = \frac{1}{x} f_Y(\ln x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\,x} e^{-\frac{1}{2}(\ln x - m)^2}$ $\quad Y \rightsquigarrow N(m,\sigma^2)$
		$E(Z) = E(e^Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} dt$
	1	$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-(m+\sigma^2))^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{\sigma^2}{2}+m} dt = e^{\frac{\sigma^2}{2}+m}$

جامعة الشهيد حمه لخضر - الوادي

كلية العلوم الدقيقة

قسم الرياضيات　　　　　　　　　　السنة الجامعية: 2016 – 2017

سنة ثانية رياضيات (السداسي الرابع)　　　　　　　　المدة الزمنية : ساعة ونصف

امتحان الدورة العادية في مقياس التحليل العددي 02

التمرين الأول: (6 نقاط)

نعتبر المصفوفة $A = \begin{bmatrix} (\alpha+1) & \alpha & \alpha \\ \alpha & (\alpha+1) & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}$ حيث α عدد حقيقي

1. أثبت أن $\alpha = 1$ هي القيمة الوحيدة التي من أجلها تكون A تناظرية معرفة موجبا.
2. أوجد في حالة $\alpha = 1$ تفكيك شولسكي للمصفوفة A ثم جد حل الجملة $AX = (4,4,3)^t$.

التمرين الثاني: (8 نقاط)

نعتبر المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

1. باستعمال طريقة جاكوبي أثبت أن القيم الذاتية للمصفوفة A هي 1 و 3 .
2. لحل الجملة $AX = b$ نعتبر الصيغة التكرارية التالية $2\sqrt{2}\,X^{(k+1)} = 2\sqrt{2}X^{(k)} + b - AX^{(k)}$ ... $(*)$

أ. أثبت أن $(*)$ تكتب على الشكل $X^{(k+1)} = BX^{(k)} + c$ حيث $B = -\frac{1}{2\sqrt{2}}A + I_2$ و $c = \frac{1}{2\sqrt{2}}b$.

ب. بين أنه اذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة A فان $1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\lambda$ قيمة ذاتية للمصفوفة B ثم عين $\rho(B)$ نصف القطر الطيفي للمصفوفة B ، ماذا تستنتج؟

ج. أوجد تقريب للحل باعتماد أربع تكرارات وباخذ $X^{(0)} = (0,0)^t$ ، $b = (1,-1)^t$ خذ $(\sqrt{2} = 1.41)$.

التمرين الثالث: (6 نقاط)

اليك مسألة كوشي التفاضلية التالية $x \in [1,2]$ ، $\begin{cases} y' = 1 + \frac{y}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$.

1. عين الحل التحليلي للمسألة التفاضلية السابقة.
2. باستعمال طريقة تايلور من الرتبة الثانية ، أوجد تقريب للحل عند 1,1 ثم 1,2 وباعتبار الخطوة $h = 0,1$.

الحل النموذجي لامتحان الدورة العادية

لمقياس التحليل العددي 2 . (2016/2017)

التمرين الأول (6 نقاط)

1) اثبات ان $\alpha = 1$ هي القيمة الوحيدة التي من اجلها تكون A تناظرية معرفة موجبا

A تناظرية معرفة موجبا $\Longleftrightarrow \left(A^t = A \ \wedge \ \det A_{kk} > 0 \quad k = \overline{1,3} \right)$

$$\Longleftrightarrow \left(\alpha^2 = \alpha \ \wedge \ \alpha + 1 > 0 \ \wedge \ (\alpha+1)^2 > \alpha^2 \ \wedge \ \det A > 0 \right)$$

01

$$\Longleftrightarrow \left([\alpha = 0 \vee \alpha = 1] \wedge (\alpha > -1) \wedge (-\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha > 0) \right)$$

01 $\quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = 1$

2. ايجاد تفكيك شولسكي لـ A

$$A = L L^T = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$L_1 \cdot C_1 : l_{11}^2 = 2 \Longleftrightarrow \boxed{l_{11} = \sqrt{2}}$

$L_1 \cdot C_2 : l_{11} l_{21} = 1 \Longleftrightarrow \boxed{l_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

01|1

$L_1 \cdot C_3 : l_{11} l_{31} = 1 \Longleftrightarrow \boxed{l_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$L_2 \cdot C_2 : l_{21}^2 + l_{22}^2 = 2 \Longleftrightarrow l_{22}^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Longleftrightarrow \boxed{l_{22} = \sqrt{\frac{3}{2}}}$

$L_2 \cdot C_3 : l_{21} l_{31} + l_{22} \cdot l_{32} = 1 \Longleftrightarrow l_{32} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Longleftrightarrow \boxed{l_{32} = \frac{1}{\sqrt{6}}}$

$L_3 . C_3 :\quad \ell_{31}^2 + \ell_{32}^2 + \ell_{33}^2 = 1 \Leftrightarrow \ell_{33}^2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$

$$\Leftrightarrow \ell_{33}^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ell_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

ومنه

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

حل الجملة :

$$AX = b \Leftrightarrow LL^T X = Y$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L^T X = Z \quad \cdots ① \\ L \hat{Z} = Y \quad \cdots ② \end{cases} \qquad (Y = b)$$

0,5

$$① \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{3/2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$② \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{3/2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\, z_1 = 4 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} z_1 + \sqrt{3/2}\, z_2 = 4 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} z_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} z_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} z_3 = 3 \end{cases}$$

01

$$\Leftrightarrow (z_1, z_2, z_3) = \left(4/\sqrt{2},\ 2\sqrt{2/3},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

نعوض z في ① نجد

$$\begin{cases} \sqrt{2}\,x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,x_3 = 4/\sqrt{2} \\ \sqrt{3/2}\,x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\,x_3 = 2\sqrt{2/3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\,x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$ 01

$\Leftrightarrow \quad (x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$

التمرين الثاني (8 نقاط)

1. باستعمال طريقة جاكوبي لنبحث أن $Sp(A) = \{1, 3\}$

لدينا . $a_{pq} = 1 \quad (p = 1,\ q = 2)$

و $u = \cot g\, 2\theta = \dfrac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}} = \dfrac{a_{22} - a_{11}}{2a_{12}} = 0$ 0,1

و $t = tg\theta$ حل $t^2 + 2ut - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad t^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad t = 1 \ \vee \ t = -1$

ومنه نفرض

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \theta = \pi/4$$ 0,1

وبالتالي $B = G(1, 2, -\pi/4)\, A \cdot G(1, 2, \pi/4)$

$$B = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{3} \end{bmatrix}$$ 01

ومنه $Sp(A) = \{1, 3\}$

2 أ) إثبات أن (*) تكتب $X^{(k+1)} = BX^{(k)} + C$

لدينا $(*) \iff 2\sqrt{2}\, X^{(k+1)} = 2\sqrt{2}\, X^{(k)} + b - AX^{(k)}$

01

$$\iff 2\sqrt{2}\, X^{(k+1)} = 2\sqrt{2}\left[\left(I_2 X^{(k)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} A X^{(k)}\right)\right] + b$$

$$\iff X^{(k+1)} = \underbrace{\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} A + I_2\right)}_{B} X^{(k)} + \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{2}} b}_{C}$$

ب- تبيان أنه إذا كانت λ قيمة ذاتية لـ A فإن $1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\lambda$ قيمة ذاتية لـ B.

$(\lambda$ قيمة ذاتية لـ $A) \iff \det(A - \lambda I_2) = 0$

$$\iff \det\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} A + \frac{1}{2\sqrt{2}} \lambda I_2\right) = 0$$

01

$$\iff \det\left(\left[I_2 - \frac{1}{2\sqrt{2}} A\right] - \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\lambda\right] I_2\right.$$

قيمة ذاتية لـ B . $\iff \left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\lambda\right)$

نعين $\rho(B)$

لدينا
$$Sp(B)=\left\{1-\frac{1}{2\sqrt{2}},\ 1-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right\}$$
$$=\left\{\underbrace{\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}_{\alpha_1},\ \underbrace{\frac{2\sqrt{2}-3}{2\sqrt{2}}}_{\alpha_2}\right\}$$

ولدينا 01
$$\rho(B)=\max\{|\alpha_1|,|\alpha_2|\}$$
$$=|\alpha_1|=\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}<1$$

ومنه الصيغة (*) تتقارب نحو الحل الوحيد للجملة $AX=b$. 0,1

جـ. إيجاد تقريب الحل

خوارزم الصيغة (*) هو

$$(*) \iff X^{(k+1)}=\begin{bmatrix}1-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}X^{(k)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}b$$

$$\iff \begin{cases} x_1^{(k+1)}=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x_1^{(k)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}x_2^{(k)}+\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ x_2^{(k+1)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}x_1^{(k)}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x_2^{(k)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$$ 0,1

$k=0$
$$\begin{cases} x_1^{(1)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\simeq 0,35 \\ x_2^{(1)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\simeq -0,35\end{cases}$$ 0,1

(0,5) $\begin{cases} x_1^{(2)} = 0,10 + 0,12 + 0,35 \simeq 0,57 \\ x_2^{(2)} = -0,12 - 0,10 - 0,35 \simeq -0,57 \end{cases}$ $k=1$

(0,5) $\begin{cases} x_1^{(3)} = 0,17 + 0,20 + 0,35 \simeq 0,72 \\ x_2^{(3)} = -0,20 - 0,17 - 0,35 \simeq -0,72 \end{cases}$ $k=2$

(0,5) $\begin{cases} x_1^{(4)} = 0,21 + 0,25 + 0,35 \simeq 0,81 \\ x_2^{(4)} = -0,25 - 0,21 - 0,35 \simeq -0,81 \end{cases}$ $k=3$

ومنه $(x_1, x_2) \simeq (x_1^{(4)}, x_2^{(4)}) = (0,81 , -0,81)$

التمرين الثالث (06 نقاط)

1) إيجاد الحل التحليلي لـ (E)

نضع $z = y/x$ (0,1) إذن $y = zx$

ومنه $y' = z'x + z$ (0,1)

ومنه

$$\begin{cases} y' = 1 + y/x \\ y(1) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} z'x + z = 1 + z \\ z = \frac{y}{x} \wedge y(1) = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z'x = 1 \quad \ldots (1) \\ z = y/x \wedge y(1) = 1 \end{cases}$$

لحل ① لسيا :

① $(\Leftrightarrow)\quad z' = 1/x$

$(\Leftrightarrow)\quad dz = 1/x\, dx$

$\Rightarrow\quad z = \ln x + C$ 0,1

نعوض $z = y/x$ نجد $y = x\ln x + Cx$ 0,1

وبتحقيق الشرط $y(1)=1$ نجد

$1 = C$

$y(x) = x\ln x + x$ 01

ومنه

هو الحل العام والوحيد للمسألة التفاضلية

② . إيجاد تقريب للحل

الخوارزمية هو

$$\begin{cases} y(1)=1 \;/\; y_0 = 1 \\ y_{i+1} = y_i + h\left(1+\dfrac{y_i}{x_i}\right) + \dfrac{h^2}{2}\left(-\dfrac{y_i}{x_i^2} + \dfrac{1}{x_i}\left(1+\dfrac{y_i}{x_i}\right)\right) \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow)\quad \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{i+1} = y_i + 0,1 + 0,1\,\dfrac{y_i}{x_i} \cancel{- 0,005\,\dfrac{y_i}{x_i^2}} + 0,005\,\dfrac{1}{x_i} \cancel{+ 0,005\,\dfrac{y_i}{x_i^2}} \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow)\quad \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{i+1} = 0,1 + y_i + \dfrac{(0,1\,y_i + 0,005)}{x_i} \end{cases}$$ 01

$$y(1,1) \simeq y_1 = 0{,}1 + y_0 + \frac{(0{,}1\, y_0 + 0{,}005)}{x_0} \qquad \underline{i=0}$$

$$= 0{,}1 + 1 + 0{,}105$$

$$y(1,1) \simeq 1{,}205 \qquad 01$$

$$y(1,2) \simeq y_2 = 0{,}1 + y_1 + \frac{(0{,}1\, y_1 + 0{,}005)}{x_1} \qquad \underline{i=1}$$

$$= 0{,}1 + 1{,}205 + \frac{(0{,}1 \times 1{,}205 + 0{,}005)}{1{,}1}$$

$$\underline{y(1,2) \simeq 1{,}305 + 0{,}1141} \qquad 01$$

$$y(1,2) \simeq 1{,}4191$$