سنة ثالثة رياضيات

الامتحان مع التصحيح النموذجي

السداسي الخامس

الدورة العادية

التمرين الأول (12ن)

ليكن $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ مصفوفة متناظرة و قابلة للقلب و $b \in \mathbb{R}^n$، نعرف التابع $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ بـ

$$F(u) = \|Au - b\|^2 \ \ \forall u \in \mathbb{R}^n$$

حيث $\|.\|$ يمثل النظيم الاقليدي.

1. بين أن F من الصنف $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ وأحسب التفاضلية $DF(u)$.
2. استنتج التدرج $\nabla F(u)$ و المصفوفة الحسينية $H_F(u)$.
3. برهن وجود ثابت حقيقي α موجب تماما بحيث

$$(H_F(u)w, w) \geq \alpha \|w\|^2 \ \ \forall w \in \mathbb{R}^n \ \forall u \in \mathbb{R}^n$$

ثم استنتج أن F محدب بالقوة.

4. برهن أنه يوجد نقطة وحيدة u^* من $\mathbb{R}^n$ حيث

$$\min_{u\in\mathbb{R}^n} \|Au - b\| = \|Au^* - b\|$$

5. في ما يلي نضع $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5.أ. تأكد أن عبارة F من أجل نقطة كيفية $u = {}^t(u_1, u_2)$ من $\mathbb{R}^2$ هي

$$F(u) = (u_1 - 1)^2 + (u_2 - 2)^2$$

5.ب. أكتب طريقة التدرج بخطوة مثلى (GPO)، من أجل ايجاد تقريب للنقطة الصغرى لـ F ثم أحسب التقريب u^1 انطلاقا من $u^0 = (0,0)$.

التمرين الثاني (8ن)

ليكن $j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابع محدب ومن الصنف $C^1(\mathbb{R}^n)$. ولتكن a نقطة من $\mathbb{R}^n$ بحيث

$$\nabla j(a) = 0$$

1. أذكر تعريف تابع محدب على $\mathbb{R}^n$.
2. برهن القضية التالية

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n \ \ j(v) \geq j(u) + (\nabla j(u), v - u).$$

3. استنتج أن النقطة a هي صغرى شاملة لـ j.
4. برهن أن التابع $j: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ المعرف بـ

$$j(x,y,z) = \mathrm{Exp}(1 + x^2 + y^2 + z^2)$$

يقبل نقطة صغرى شاملة وحيدة في $\mathbb{R}^3$ يطلب تعيينها. (Exp ترمز إلى الدالة الأسية)

سلم التنقيط ت1: 12=4.5+1.5+1.5+2+2.5 ت2: 2.5+1.5+2.5+1.5=8

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الشهيد حمه لخضر . الوادي

كلية : تصحيح امتحان معيا قسم الامتحان

الإسم واللقب :

مقياس: .... الرقم: .... الدفعة : .... الفوج: ....

التاريخ:

رقم التسجيل :

الرقم السري :

يمنع على الطالب وضع أي إشارة على ورقة الإمتحان

الرقم السري

العلامة $20/$

حل س 1

1/ F ج-ك إذن $F \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ (0,2)

$u \in \mathbb{R}^n$, $F(u+h) = \|A(u+h) - b\|^2$

$= \|Au - b + Ah\|^2$
$= \|Au - b\|^2 + \|Ah\|^2 + 2\langle Au - b, h\rangle$

$L(h) = 2\langle Au - b, h\rangle$, $\theta(h) = \|Ah\|^2$

$0 \le \frac{\theta(h)}{\|h\|} = \frac{\|Ah\|^2}{\|h\|} \le \frac{\|A\|^2 \cdot \|h\|^2}{\|h\|} \to 0$ (0,2)

L خطي من خاصية الجداء السلمي وتوزيع $\times$ حل $+$ بالنسبة للمتغيرات وهو أيضا مستمر. إذن

$F(u+h) = F(u) + L(h) + \theta(h)$

$DF(u)(h) = 2\langle Au - b, Ah\rangle$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$

2/ $DF(u)(h) = 2\langle {}^tA(Au - b), h\rangle$
لكن ${}^tA = A$. إذن

$DF(u)(h) = 2\langle A^2u - Ab, h\rangle$

$$\nabla F(u) = 2A^2 u - 2Ab \quad \text{(تآلفي)}$$ 01

$$H_F(u) = J_{\nabla F}(u) = 2A^2 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$ 01

/3 - A متناظرة ومعرفة موجبة إذن هي قابلة للقلب، بالاستنتاج A^2 متناظرة ومعرفة موجبة ومنه يوجد $\alpha > 0$ بحيث 1,5

$$\langle H_F(u) w, w \rangle \geq \alpha \|w\|^2, \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$$

مع $\alpha = 2\lambda_{min}(A^2)$

الاستنتاج. العلاقة أعلاه تكافئ أن F محدب بالقوة، أيضا هو من الصنف C^1

/4 - F محدب بالقوة ومن الصنف C^1 إذن توجد نقطة صغرى وحيدة u^* / 1,5

$$F(u^*) \leq F(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow \|Au^* - b\| \leq \|Au - b\| \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow \min_{u \in \mathbb{R}^n} \|Au - b\| = \|Au^* - b\|$$

/5 - $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 4,5

أ/5 .

$$F(u) = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2$$

$$= \|(u_1 - 1, u_2 - 2)\|^2$$

$= (y_1 - 1)^2 + (y_2 - 2)^2$

5.ب/ الطريقة:

$$GPO \begin{cases} u^0 \in \mathbb{R}^2 \\ u^{k+1} = u^k - \rho_k \nabla J(u^k) \quad . k \in \mathbb{N} \\ \text{حيث } \rho_k \text{ تحقق} \\ F(u^k - \rho_k \nabla F(u^k)) \leq F(u^k - \rho \nabla F(u^k)) \\ \forall \rho \geq 0 \end{cases}$$

حساب u^1:

$\nabla F(y_1, y_2) = {}^t(2(y_1 - 1), 2(y_2 - 2))$

$u^0 = (0,0)$, $u^1 = (0,0) - \rho_0(-1,-2)$
$= (\rho_0, 2\rho_0)$

$\phi(\rho) = F(\rho, 2\rho)$, $\phi'(\rho) = 2(\rho - 1) + 4(2\rho - 2)$
$\phi'(\rho) = 0 \iff \rho = 1$
$\iff u^1 = (1,2)$

حل ت. 2

1/ J تابع محدب على $\mathbb{R}^n$ 1,5

$\forall t \in [0,1], \forall u, v \in \mathbb{R}^n \; J(tu + (1-t)v) \leq tJ(u) + (1-t)J(v)$

2/ $u, v \in \mathbb{R}^n$ 2,5

$J(tv + (1-t)u) \leq tJ(v) + (1-t)J(u) \quad \forall t \in [0,1]$

$\iff J(u + t(v - u)) \leq t(J(v) - J(u)) + J(u), \forall t \in [0,1]$

$\Rightarrow \dfrac{J(u + t(v - u)) - J(u)}{t} \leq J(v) - J(u) \; \forall t \in]0,1]$

$\Rightarrow \langle \nabla J(u), v - u \rangle \leq J(v) - J(u)$ بالمرور للنهاية

$\iff J(v) \geq J(u) + \langle \nabla J(u), v - u \rangle$

13- من الحلاقتين 1,5

$$\begin{cases} \nabla J(a) = 0 \\ J(v) \geq J(a) + \langle \nabla J(a), v - a \rangle \quad \forall v \end{cases}$$

نرى أن a نقطة صغرى شاملة.

14- $J \in C^1$ 2,5

$$\nabla J(x,y,z) = 2e^{1+x^2+y^2+z^2}(x,y,z) = (0,0,0)$$

إذن $(x,y,z) = (0,0,0)$ هي نقطة حرجة وحيدة.

$$\nabla J(0,0,0) = (0,0,0)$$

التابع $h(x,y,z) \to 1+x^2+y^2+z^2$ محدب لأن

$$H_h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2 > 0$$

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

والتابع $t \to e^t$ محدب ~~ومتزايد~~ لأن $(e^t)'' = e^t > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

إذن التابع J محدب كونه تابعاً محدباً مع تزايد الدالة $t \to e^t$.

ومنه حسب السؤال 13، إن $(0,0,0)$ نقطة صغرى شاملة لـ J. والوحدانية تأتينا من وحدانية النقطة الحرجة لـ J.

le 11-01-2017

Corrigé type du contrôle

Équation de la physique mathématique

3ème licence maths (2017)

Exercice N°=1 : La solution générale d'EDP

a) le système différentielle suivants = $\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = \frac{dz}{z^2(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})}$

$\Rightarrow \alpha(x,y,u) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2}$, on chercher la fonction $\beta(x,y,u) = ?$

on a : $\frac{dx+dy}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}} = \frac{dz}{z^2(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})} \Rightarrow x+y = -\frac{1}{z} + C_1$ d'où $\beta(x,y,u) = x+y+\frac{1}{z}$

comme α et β sont fonctionnellement indépendants car : $J(x,y) \neq 0$, donc la solution générale $H(\alpha,\beta)=0$, d'après le théorème d'implicite on a : $\beta - f(\alpha) = 0$, $f \in C^1$

d'où, $\boxed{\frac{1}{z} = f(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}) - x - y}$, $f \in C^1$

b) le système différentielle suivants = on a = $\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{yx^2} = \frac{dz}{(x^2+y^2)z}$

on a : $\alpha(x,y,u) = x^2 - y^2$, on chercher la fonction $\beta(x,y,u) = ?$ on a : $\frac{y\,dx + x\,dy}{xy} = \frac{dz}{z}$

$\Rightarrow \frac{d(xy)}{yx} = \frac{dz}{z}$ d'où, $\boxed{z(x,y) = xy\,H(x^2-y^2)}$, $H \in C^1$ (d'après le théorème d'implicite) et α et β sont fonctionnellement indépendants.

c) le système ~~di~~différentielle suivants : $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{1-\cancel{2}\frac{z^2}{x^2}}$

$\Rightarrow \alpha(x,y,u) = y$; on chercher la fonction $\beta(x,y,u) = ?$ on a : $\frac{dx}{1} = \frac{dz}{1-2\frac{z^2}{x^2}}$

l'équation différentielle suivants : $\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{z^2}{x^2} \Rightarrow \beta(x,y,u) = x^3 - \frac{z+x}{z-\frac{1}{2}x}$

comme α et β sont fonctionnellement indépendants car : $J(x,y) \neq 0$, alors la solution générale $H(\alpha,\beta) = 0$, d'où, $\boxed{z(x,y) = \frac{-2x - x^4 - x f(y)}{2 - 2(x^3 + f(y))}}$

d) le système suivants : $\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}$, $\alpha(x,y,u) = x+y+z$; $\beta(x,y,u) = x^2+y^2+z^2$

avec la condition : $xy = 1$ et $z = 0$ on obtient : $\boxed{z(x,y) = \frac{1-xy}{x+y}}$

2) $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$; on a : $J(x,y) = \frac{2y}{x} \neq 0$. donc X et Y indépendants

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial X} - \frac{1}{x^2}y\frac{\partial z}{\partial Y} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{\partial z}{\partial X} + \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial Y} \end{cases}$$

en remplaçant dans l'équation initiale on a donc : $\frac{\partial^2 z}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2} = 0$ d'où :

$$z(X,Y) = F(X-Y) + G(X+Y),\ F,G \in C^1$$

Exo2 : Soit EDP : $x^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Longrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

1) On a : $D(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) = 0 - \frac{x^4}{16}(-1) = \frac{x^4}{16} > 0$ l'équation du type hyperbolique et l'équation est dit $2^{ème}$ ordre.

2) Déterminer les caractéristique : si : $a(x,y) \neq 0$, alors l'équation différentielle :

$$\frac{x^4}{16}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{16}{x^4} \Longleftrightarrow \frac{dy}{dx} = \pm \frac{4}{x^2} \text{ d'où : } \begin{cases} c_1 = y + \frac{4}{x} \\ c_2 = y - \frac{4}{x} \end{cases}$$

le système l'équation suivants caractéristique : $f(x,y) = y + \frac{4}{x}$, $g(x,y) = y - \frac{4}{x}$.

3) La forme standard : $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial Y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial Y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y} \end{cases}$

et : $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{8}{x^3}\left(\frac{\partial u}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial Y}\right) + \frac{16}{x^4}\left(-2\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right)$

$$\Longrightarrow \frac{x^4}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \frac{x}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial Y}\right) \text{ d'où } 2\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = \frac{x}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial Y}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = \frac{1}{X-Y}\left(\frac{\partial u}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial Y}\right) \text{ ; car : } \frac{x}{4} = \frac{2}{X-Y}.$$

4) la solution général est donné : $u(x,y) = \phi(x - cy) + \phi(x + cy)$; où $c = \frac{x^2}{4}$ donc la formule d'Alembert est : $u(x,y) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y > 0$, et pour la solution générale $\forall x \in \mathbb{R}^+$

la solution est donné : $u(x,y) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq \frac{x^2}{4}y \\ \frac{1}{2}\left[\left(x + \frac{x^2}{4}y\right) - \left(\frac{x^2}{4}y - x\right)\right] + \frac{2}{x^2}\int_{\frac{x^2}{4}y - x}^{\frac{x^2}{4}y + x} 0\,dy \text{ ;} & \text{si } x < \frac{x^2}{4}y \end{cases}$

Exercice N°=3 : pour $t > 0$, on a : $\psi(x,t) = u(x,t) + V(x,t)$ où, Vérifier $V(x,t)$: tq : $V(0,t) = \pi^2 t$, $V(\pi,t) = \pi^2 t$ il faut alors trouver V telleque :

on choisit $V(x,t) = \pi^2 t + \frac{x}{\pi}(\pi^2 t - \pi^2 t) = \pi^2 t$

$$(P) : \begin{cases} (E)\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[-\underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}}_{=0} + t\sin x\right] \\ (F)\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ (I) : u(x,0) = \frac{\alpha}{m+1}\sin mx - \underbrace{V(x,0)}_{=0} \\ \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 - \frac{\partial V}{\partial t}(x,0) = -\pi^2 \end{cases}$$

la solution de (P) est $u(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(t)\sin nx$, et : $\beta_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin y \sin ny\,dy = \begin{cases} t, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$

alors : $u_n(0)$ et $\beta_n(t)$ écrivant que u vérifie

et : $u_n(x,0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(0)\sin(nx) = \frac{\alpha}{m+1}\sin mx$,

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n'(0)\sin nx$ Alors : $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left[u_n''(t) + n^2 u_n(t)\right]\sin nx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n(t)\sin nx$.

Soit $u_n''(t) + n^2 u_n(t) = \beta_n(t)$ et $\begin{cases} u_n(t) = C_1\cos nt + C_2\sin nt, & \beta_n(t) = 0,\ n \neq 1 \\ u_n(t) = C_1\cos t + C_2\sin t + t, & \beta_1(t) = t,\ n = 1. \\ u_n(0) = \frac{\alpha}{(m+1)}\begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \\ u_n'(0) = \frac{2\pi}{n}\left[(-1)^n - 1\right] \end{cases}$

Université Echahid Hamma Lakhdar El Oued
Faculté des Sciences Exactes
Département des Mathématiques

Année Universitaire : 2016/2017
$3^{ème}$ année Licence Mathématiques
Module : EQU.PHYS.MATHS

Contrôle S5 : le 11-01-2017

(08pts) **Exercice n°1**:1)- Donner les solutions générales des équations aux dérivées partielles suivantes:

a) $\sqrt[3]{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} - \sqrt[3]{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} - z^2\sqrt[3]{x-y} = 0$

b) $y\dfrac{\partial z}{\partial y} + x\dfrac{\partial z}{\partial x} - (\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x})z = 0$

c) $\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2\dfrac{z^2}{x^2} - 1 = 0$

d) $\begin{cases} (y-z)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (z-x)\dfrac{\partial z}{\partial y} = x - y \\ z = 0, \quad xy = 1 \end{cases}$

où z est une fonction inconnue de x et y .

2)- Résoudre EDP à deux varisbles de fonction inconnue $z(x,y)$:

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Indication: On utilise le changement des variables: $X(x,y) = xy$, $Y(x,y) = \dfrac{y}{x}$

(07,5pts) **Exercice n°2**: Soit l'équation de la corde vibrante, EDP de fonction inconnue $u(x,y)$:

$$x^4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (1)$$

1)-Quelle est l'ordre et le type de cette équation (1).
2)-Determiner ses caractéristique de équation (1).
3)- Donner la former standard de cette équation (1) .
4)-Donner la formule d'Alembert de (1)avec conditions aux limites $u(x,0) = x; \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0$.
Résoudre la solution générale de équation (1) pour $x \in \mathbb{R}^+$ ($x \in]0;+\infty[$)

(04,5pts) **Exercice n°3** :
Résoudre par la méthode de séparation des variables (Méthode des Fourier) suivant:

$$(E) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - t\sin x \ , \ 0 < x < \pi \ , t > 0$$
$$(F) \quad \Psi(0,t) = \Psi(\pi,t) = \pi^2 t \ , \ t > 0$$
$$(I) \quad \begin{cases} \Psi(x,0) = \dfrac{\alpha}{m+1}\sin mx \quad ; m \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{R}^*, \ 0 < x < \pi \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

BONNE CHANCE..

Université d'El-Oued, 3ème année Licence Maths — Nom : ...... الحل النموذجي

Module : Analyse Hilbertienne — Prénom : ......

Contrôle final: le 05-01-2017 (90 min) — Groupe : ......

Exercice n°1: 1) **(1 point)** Est ce que $(\mathbb{R}_+, |.|)$ est un espace de Hilbert ? $(\mathbb{R}_+, |\cdot|)$ n'est pas un espace de Hilbert car $(\mathbb{R}_+, +, \cdot)$ n'est pas 1 e.v car $(\mathbb{R}_+, +)$ n'est pas un groupe l'élément 3 n'a pas de symétrique / +

2) **(2 points)** Soient $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Est ce que $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ est un espace de Hilbert ? $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas 1 Hilbert car sa norme ne vérifie pas l'identité du parallélogramme : $\left.\begin{array}{l} x = (1, 0, -1) \\ y = (0, 1, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\|x\|_\infty^2 = \|y\|_\infty^2 = 1$, $\|x+y\|_\infty = \|x-y\|_\infty^2 = 1$

Donc $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2 \neq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4$

3) **(3 points)** On pose : $l^2(\mathbb{C}) = l^2 = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$ et $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{2017} x_i \overline{y_i}$.

Démontrer, avec un contre exemple, que $[l^2(\mathbb{C}), \langle .,. \rangle]$ n'est pas un espace de Hilbert.

n'est pas 1 Hilbert car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ n'est pas 1 produit scalaire. En effet pour $x = (0, 0, \cdots 0, 1, 1, 1, \cdots)$ on a : $\langle x, x \rangle = 0$ alors que $x \neq 0$

Exercice n°2: Soient $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert $A \subset H$. Montrer que :

1) **(2 points)** $0 \notin A \implies A \cap A^\perp = \emptyset$.

$x \in A \cap A^\perp \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ x \in A^\perp \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in A \end{array} \right.$

$\Rightarrow \langle x, x \rangle = 0$ (car $x \in A$) $\Rightarrow x = 0$

or $0 \notin A$ Donc $A \cap A^\perp = \emptyset$

2) **(3 points)** $A^\perp = \overline{vectA}^\perp$ (*) $A \subset vect A \subset \overline{vect A} \Rightarrow \overline{vect A}^\perp \subset A^\perp$ --- (1)

D'après le TD n°2, $x \in A^\perp \Rightarrow x \perp A \xRightarrow{T.D} x \perp vect A$

$\Rightarrow x \in \overline{vect A}^\perp$

Donc $A^\perp \subset \overline{vect A}^\perp$ --- (2)

D'après (1) et (2) on trouve : (*)

3) **(4 points)** Soit $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite orthonormal de H. Montrer l'inégalité de Bessel : $\forall \ldots : \ldots\ldots \leqslant \|\cdot\|^2$

On a : $\forall \ldots : \left\| \ldots - \sum_{i=1}^{n} \ldots \right\|^2 = \ldots$ On a : $\forall x \in H$, $0 \leq \|x - \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle e_i\|^2$ $\forall x \in H : \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

$= \langle x - \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle e_i , x - \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle e_i \rangle = \langle x, x \rangle - \sum_{i=1}^{m} \overline{a_i} \langle x, e_i \rangle - \sum_{i=1}^{m} a_i \langle e_i, x \rangle$

$+ \sum_{i=1}^{m} a_i \left(\sum_{j=1}^{m} \overline{a_j} \langle e_i, e_j \rangle \right) = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{m} |a_i|^2 - \sum_{i=1}^{m} |a_i|^2 + \sum_{i=1}^{m} |a_i|^2$ (car

$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$) où $\boxed{a_i = \langle x, e_i \rangle}$ Donc : $\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{m} |a_i|^2 \geq 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} |a_i|^2 = \sum_{i=1}^{m} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$. Si on pose $S_m = \sum_{i=1}^{m} |\langle x, e_i \rangle|^2$ on voit

que (S_n) est majorée et croissante donc convergente et sa limite $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

\#

Exercice n°3: **(5 points)** Soient $(H, \langle \ldots \rangle)$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$. Montrer que :

$$\left[\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \text{ et } \|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \right] \implies x \perp y.$$

$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Rightarrow$

$\boxed{\mathrm{Re}\langle x, y \rangle = 0}$ ... (1) De même $\|x+iy\|^2 = \langle x+iy, x+iy \rangle = \ldots$

$\|x\|^2 + 2\,\mathrm{Im}\langle x, y \rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Rightarrow \boxed{\mathrm{Im}\langle x, y \rangle = 0}$ ... (2)

(1) $\wedge$ (2) $\Rightarrow \langle x, y \rangle = 0$ Donc $x \perp y$ \#.

III. ضع علامة(×) في المكان المناسب في الجدول التالي: (2.5 ن)(لا تقبل الإجابة العشوائية وملئ الجدول بالعلامات)

العـــــبارات	المفهوم التقليدي للمنهاج	المفهوم الحديث للمنهاج
تقتصر وظيفة المدرسة على تلقين المعارف والمعلومات للتلاميذ واختبار مدى استيعابها من قبل التلاميذ بواسطة الحفظ والتسميع.	×	
المنهاج هو مجموعة النشاطات التي يقوم بها التلاميذ والخبرات التي يمرون بها تحت إشراف المدرسة وبتوجيه منها ابتداء بالأهداف وانتهاء بالتقويم.		×
المعلومات والمعارف لوحدها كافية في تنمية جميع جوانب شخصية التلاميذ.	×	
تتوقف القيمة الحقيقية للمعارف والمهارات المكتسبة على مدى قدرة المتعلم في استخدامها والاستفادة منها في الحياة اليومية والمواقف المختلفة.		×
لا يولى اهتمام للأنشطة اللاصفية باعتبارها شيء ثانوي لا يعمل تنمية الجوانب العقلية.	×	

IV. على ضوء دراستك لاستراتيجيات التعلم النشط أذكر ثلاثة منها مع تقديم شرح بسيط لكل استراتيجية(6 ن)

يذكر الطالب اي نوع من الاستراتيجيات (التعليم التعاوني- العصف الذهني- الخرائط الذهنية- لعب الادوار- طرح الأسئلة التباعدية- وعاء السمك- ورقة الدقيقة الواحدة- التفكير بالقبعات الست- التفكير بصوت مرتفع)

وفقكم الله وسدد خطاكم

السنة ثالثة رياضيات	جامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي	الاسم واللقب:..........................
الثلاثاء:10-01-2017	كلية العلوم الدقيقة	الرقم:........الفوج:...............
	قسم الرياضيات	العلامة:..........

الإجابة النموذجية لامتحان السداسي في مقياس الديداكتيك- LA didactique-

I. أجب بصحيح أو خطأ على العبارات التالية بوضع العلامة (×) في المكان المناسب: (2.5 ن)

1- عُرِّف مصطلح التعليمية باعتباره فنا للتعليم أول مرة سنة 1631على يد رايتش. **صحيح (×) خاطئ ( ).**

2- أهم أساس في المنهاج الحديث هو الأساس النفسي الذي يقوم على مراعاة خصائص المعلم النفسية والانفعالية والعقلية والوجدانية....**صحيح ( ) خاطئ (×).**

3- حسب المفهوم الحديث للمنهاج يعتبر الكتاب المدرسي المصدر الوحيد الذي يتلقى منه الطالب علومه. **صحيح ( ) خاطئ (×).**

4- ينظم اليوم الدراسي بالنسبة للتعليم التقليدي في صورة فقرات مع وجود مرونة في اختيار توقيت الفقرات.**صحيح( ) خاطئ (×).**

5- تسند مهمة إعداد المناهج الحديثة إلى لجان مختصة وعلى المعلم أن يتقيد بالموضوعات التي حددتها اللجنة ولا يجوز له إدخال أي تغيير أو تعديل عليها. **صحيح ( ) خاطئ (×).**

6- تندرج مناهج الجيل الثاني للمنظومة التربوية الجزائرية ضمن المفهوم الحديث للمنهاج. **صحيح( ) خاطئ (×).**

7- تعتبر النظرية البنائية **لجون بياجيه** القاعدة التي بنية عليها المناهج الحديثة. **صحيح(×) خاطئ ( ).**

8- ينتمي النمط القرائي/ الكتابي والنمط الأدائي/ العملي إلى الأنماط الشخصية للتعلم. **صحيح( ) خاطئ (×).**

9- تصنف عمليات التفكير (المعرفة-الفهم-التطبيق) حسب **هرم بلوم** ضمن مهارات التفكير العليا. **صحيح( ) خاطئ (×).**

10- يتعلق البعد التربوي (البيداغوجي) بالمتعلم من حيث خصائصه النفسية والوجدانية والاجتماعية واتجاهاته. صحيح( ) **خاطئ(×).**

I.

II. أجب على ما يلي باختصار: (6 ن)

1- مر مفهوم التعليمية بمراحل أثناء تطوره اذكر هذه المراحل بالترتيب مع تقديم شرح بسيط لكل مرحلة: (2 ن)

- **من فن التعليم إلى نظرية التعليم: (تقدم شرح بسيط)**
- **.من التعليم إلى التعلم (تقدم شرح بسيط)**
- **التفاعل بين التعليم والتعلم(تقدم شرح بسيط)**

2- تتميز التعليمية بجملة من الخصائص حدد أربعة منها: (2 ن)

تجعل المتعلم محور العملية التعليمية- العمل على تطوير قدرات المتعلم في التحليل والتفكير والابداع- تنطلق من المكتسبات القبلية للمتعلم لبناء تعلمات جديدة-تشخص صعوبات التعلم لأجل تحقيق أكبر نجاح في التعلم والتحصيل-تعتبر المعلم شريكا في اتخاذ القرار بينه وبين المتعلمين، فلا يستبد بآرائه-تعطي مكانة بارزة للتقويم، وبالأخص التقويم التكويني للتأكد من فعالية النشاط التعليمي.

3- اذكر أسس بناء المنهاج دون شرح: (2 ن)

الأساس النفسي الوجداني- الاساس العقلي المعرفي- الأسس الثقافية والاجتماعية-الأساس الفلسفي

السنة ثالثة رياضيات الثلاثاء:10-01-2017	جامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي كلية العلوم الدقيقة قسم الرياضيات	الاسم واللقب:....................... الرقم:.........الفوج:.............. العلامة:............

امتحان السداسي في مقياس الديداكتيك -LA didactique-

I. أجب بصحيح أو خطأ على العبارات التالية بوضع العلامة (×) في المكان المناسب: (2.5 ن)

1- عُرِّف مصطلح التعليمية باعتباره فنا للتعليم أول مرة سنة 1631على يد رايتش. **صحيح ( ) خاطئ ( ).**

2- أهم أساس في المنهاج الحديث هو الأساس النفسي الذي يقوم على مراعاة خصائص المعلم النفسية والانفعالية والعقلية والوجدانية....**صحيح ( ) خاطئ ( ).**

3- حسب المفهوم الحديث للمنهاج يعتبر الكتاب المدرسي المصدر الوحيد الذي يتلقى منه الطالب علومه. **صحيح ( ) خاطئ ( ).**

4- ينظم اليوم الدراسي بالنسبة للتعليم التقليدي في صورة فقرات مع وجود مرونة في اختيار توقيت الفقرات. **صحيح( ) خاطئ ( ).**

5- تسند مهمة إعداد المناهج الحديثة إلى لجان مختصة وعلى المعلم أن يتقيد بالموضوعات التي حددتها اللجنة ولا يجوز له إدخال أي تغيير أو تعديل عليها. **صحيح ( ) خاطئ ( ).**

6- تندرج مناهج الجيل الثاني للمنظومة التربوية الجزائرية ضمن المفهوم الحديث للمنهاج. **صحيح( ) خاطئ ( ).**

7- تعتبر النظرية البنائية **لجون بياجيه** القاعدة التي بنية عليها المناهج الحديثة. **صحيح( ) خاطئ ( ).**

8- ينتمي النمط القرائي/ الكتابي والنمط الأدائي/ العملي إلى الأنماط الشخصية للتعلم. **صحيح( ) خاطئ ( ).**

9- تصنف عمليات التفكير (المعرفة-الفهم-التطبيق) حسب هرم بلوم ضمن مهارات التفكير العليا. **صحيح( ) خاطئ ( ).**

10- يتعلق البعد التربوي (البيداغوجي) بالمتعلم من حيث خصائصه النفسية والوجدانية والاجتماعية واتجاهاته.**صحيح( ) خاطئ( ).**

I.

II. أجب على ما يلي باختصار: (6 ن)

1- مر مفهوم التعليمية بمراحل أثناء تطوره اذكر هذه المراحل بالترتيب مع تقديم شرح بسيط لكل مرحلة:

....

....

....

....

2- تتميز التعليمية بجملة من الخصائص حدد أربعة منها: ....

....

....

....

3- أذكر أسس بناء المنهاج دون شرح: ....

....

....

....

III. ضع علامة(×) في المكان المناسب في الجدول التالي: (2.5 ن)(لا تقبل الإجابة العشوائية وملئ الجدول بالعلامات)

العــــبارات	المفهوم التقليدي للمنهاج	المفهوم الحديث للمنهاج
تقتصر وظيفة المدرسة على تلقين المعارف والمعلومات للتلاميذ واختبار مدى استيعابها من قبل التلاميذ بواسطة الحفظ والتسميع.		
المنهاج هو مجموعة النشاطات التي يقوم بها التلاميذ والخبرات التي يمرون بها تحت إشراف المدرسة وبتوجيه منها ابتداء بالأهداف وانتهاء بالتقويم.		
المعلومات والمعارف لوحدها كافية في تنمية جميع جوانب شخصية التلاميذ.		
تتوقف القيمة الحقيقية للمعارف والمهارات المكتسبة على مدى قدرة المتعلم في استخدامها والاستفادة منها في الحياة اليومية والمواقف المختلفة.		
لا يولي اهتمام للأنشطة اللاصفية باعتبارها شيء ثانوي لا يعمل تنمية الجوانب العقلية.		

IV. على ضوء دراستك لاستراتيجيات التعلم النشط أذكر ثلاثة منها مع تقديم شرح بسيط لكل استراتيجية(6 ن)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

وفقكم الله وسدد خطاكم

التمرين الثالث : (9ن)

1) نعلم أن : $\exists t_0 \in \mathbb{R} : |e^{t_0 A}| \neq 0 \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R} : |e^{tA}| \neq 0$

نأخذ $t_0 = 0$ نجد $|e^{0}| = |I| = 1 \neq 0$ إذن $\forall t \in \mathbb{R}, |e^{tA}| \neq 0$ وبالتالي

e^{tA} قابلة للقلب . (1)

لدينا : $e^{tA} \cdot e^{-tA} = e^{-tA} \cdot e^{tA} = e^{0} = I$ إذن $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$ (0,5)

2) أنظر المحاضرة . (1,5)

3) واضح أن : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$ ومنه نجد :

$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ وبالتالي :

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} -e^{t} & e^{3t} & -e^{2t} \\ 4e^{t} & 2e^{3t} & e^{2t} \\ e^{t} & e^{3t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$ (2)

4) لدينا : $e^{tA} = \phi(t)\,\phi^{-1}(0)$, $\phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

ومنه :

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t} & -\frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{3t} & -\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{5t} \\ 0 & e^{3t} & -e^{3t} + e^{5t} \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{pmatrix}$$ (2)

5) لدينا : $Y(t) = e^{tA}Y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} B(s)\,ds$

$Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B(s) = \begin{pmatrix} e^{s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ومنه :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{3}{2}e^{5t} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t} \\ -e^{3t} + 3e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{pmatrix}$$ (2)

سنة ثالثة رياضيات

تصحيح امتحان المعادلات التفاضلية

التمرين الأول: (6ن)

1) نضع: $z = y - 4x$ فنجد: $\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} - 4$ وبالتعويض نجد:

$\frac{dz}{z^2-4} = dx$ وبالمكاملة نجد: $\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right| = 4x + C$ (3ن)

ومنه: $\boxed{\ln\left|\frac{y-4x-2}{y-4x+2}\right| = 4x + C}$ (حل في شكله الضمني) حيث C ثابت اختياري.

2) لدينا: $\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy^3$ ، $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$ اذن المعادلة غير تامة، لنبحث عن عامل المكاملة: $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = 2x = f(x)$

ومنه: $\mu = e^{\int f(x)dx}$ وبالتالي: $\mu = e^{x^2}$ نضرب الطرفين في μ نجد:

$(x^3 + xy^4)e^{x^2}dx + 2e^{x^2}y^3 dy = 0$ وهي معادلة تامة

$$\int_0^x M(x,y)\,dx + \int_0^y N(0,y)\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^x (x^3 + xy^4)e^{x^2}dx + \int_0^y 2y^3\,dy = 0$$

$\boxed{y^4 + x^2 - 1 = Ce^{-x^2}}$ (3ن) ومنه الحل في شكله الضمني هو

حيث C ثابت اختياري.

3) نضع: $z = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$ $(n = \frac{1}{2})$ اذن $z' = \frac{1}{2\sqrt{y}}y'$ ومنه:

$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{y}} = 2e^{-x}$ بالتعويض نجد: $2z' - z = 2e^{-x}$

وهي معادلة تفاضلية خطية نحلها بإحدى الطريقتين فنجد:

$z = -\frac{2}{3}e^{-x} + Ce^{\frac{1}{2}x}$ وبالتالي:

$\boxed{y = \left(-\frac{2}{3}e^{-x} + Ce^{\frac{1}{2}x}\right)^2}$ (2ن)

مع C ثابت اختياري.

جامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي
كلية العلوم الدقيقة - قسم الرياضيات

السنة الجامعية : 2016 - 2017

الزمن : 90د

المستوى : ثالثة رياضيات

السداسي : الخامس

﴿ امتحان الدورة العادية في مقياس المعادلات التفاضلية ﴾

التمرين الأول : (6ن، نقطتين لكل معادلة)

1. حل المعادلة التفاضلية التالية : $y' = (y-4x)^2$
2. ميز إن كانت المعادلة التالية تامة أو غير تامة، ثم حلها : $(x^3 + xy^4)dx + 2y^3 dy = 0$
3. جد الحل العام لمعادلة برنولي التفاضلية التالية :

$$y' - y = 2\sqrt{y}e^{-x}$$

التمرين الثاني: (5ن)

نعتبر مسألة كوشي التالية : $(P):\begin{cases} y' = 2y^{\frac{3}{4}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

حيث : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1, |y| \le 2\}$

1) أثبت أن متتالية التقريبات المتعاقبة تتقارب نحو 0.......2ن
2) أدرس وجود ووحدانية الحل للمسألة (P) 2ن
3) ماذا تستنتج ؟ 1ن

التمرين الثالث : (9ن)

1. أثبت أن المصفوفة e^{tA} قابلة للقلب محددا مقلوبها 1,5ن
2. أثبت أن : $\left(e^{tA}\right)' = Ae^{tA}$. ماذا تستنتج ؟ 1,5ن
3. حدد المصفوفة الأساسية للجملة التفاضلية المتجانسة : $Y' = AY$ حيث $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 2ن
4. استنتج e^{tA} 2ن
5. جد الحل المشروط للجملة اللامتجانسة : $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} Y - \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ب : $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$......2ن

بالتوفيق وحظ سعيد

Exercice 3 (7 points)

Considérons une fonction $f : [0, 1] \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurable, et posons $g := \chi_E$ avec $E := \{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R},\ \text{tel que}\ y < f(x)\}$.

1. Montrer que
   (i) La fonction g est mesurable.
   (ii) $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x, y)dy$.
   (iii) $m(\{x \in [0, 1],\ \text{tel que}\ f(x) > y\}) = \displaystyle\int_0^1 g(x, y)dx$.
2. En déduire (en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli) que

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{+\infty} m(\{x \in [0, 1],\ \text{tel que}\ f(x) > y\})\, dy.$$

Solution :

1.

(i) Pour montrer que la fonction g est mesurable, il suffit de montrer que l'ensemble E est mesurable. On a, $E := \{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R},\ \text{tel que}\ y < f(x)\}$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{tel que}\ f(x) - y > 0\} \cap ([0, 1] \times \mathbb{R}) = E_1 \cap E_2.$$

La fonction $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto f(x) - y \in \mathbb{R}$ est mesurable implique que E_1 est un sous-ensemble mesurable dans $\mathbb{R}^2$.

E_2 est le produit de deux parties mesurables dans $\mathbb{R}$, donc E_2 est un sous-ensemble mesurable dans $\mathbb{R}^2$.

Ainsi, l'intersection $E = E_1 \cap E_2$ est mesurable dans $\mathbb{R}^2$, et par conséquent la fonction g est mesurable.

(ii) Puisque, $g(x, y) = \begin{cases} 1, & si\ f(x) > y \\ 0, & si\ f(x) \leqslant y \end{cases} = \chi_{[0, f(x)[}(y)$, on a alors

$$f(x) = \int_0^{f(x)} dy = \int_0^{+\infty} \chi_{[0, f(x)[}(y)dy = \int_0^{+\infty} g(x, y)dy.$$

(iii) On a, $\quad m(\{x \in [0, 1],\ \text{t.q.}\ f(x) > y\}) = \displaystyle\int_0^1 \chi_{\{x \in [0,1],\ \text{t.q.}\ f(x) > y\}} dx = \int_0^1 g(x, y)dx.$

2.

En appliquant le théorème de Fubini-Tonelli, on obtient

$$\int_0^1 f(x)dx \overset{\text{(ii)}}{=} \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} g(x, y)dy \right) \overset{\text{Tonelli}}{=} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 g(x, y)dy \right) \overset{\text{(iii)}}{=} \int_0^{+\infty} m(\{x \in [0, 1],\ \text{t.q.}\ f(x) > y\})\, dy.$$

Exercice 2 (8 points)

1. Énoncer le théorème de la convergence monotone.
2. Calcul de la limite : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} |cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x} dx$.

   (i) Étudier la convergence, et déterminer la limite de la suite des fonctions
   $$f_n(x) := |cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x} \text{ définie pour } x \in [0, +\infty[\text{ et } n \geqslant 1.$$
   (ii) Montrer que la suite $\left\{\int_0^{+\infty} |cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x} dx\right\}_{n\geqslant 1}$ est convergente.

   (iii) En déduire la valeur de la limite : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} |cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x} dx$.

__Solution :__

1. **Théorème de la convergence monotone :**

Soit $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions mesurables non-négatives sur un ensemble E mesurable (dans $\mathbb{R}$). Si la suite $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ est croissante et converge simplement vers f, alors :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \, dm = \int_E f \, dm.$$

2. **Calcul de la limite** : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} |cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x} dx$.

(i) L'ensemble $E := \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{N}\}$ étant dénombrable, c'est un ensemble négligeable.
Pour tout $x \in [0, +\infty[\setminus E$, la suite numérique $f_n(x) := |cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x}$ converge vers la valeur $f(x) := e^{-x}$.
Ainsi, la suite des fonctions $f_n(x) := |cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x}$ définie pour $x \in [0, +\infty[$ et $n \geqslant 1$, converge presque partout sur $[0, +\infty[$, vers la fonction $f(x) := e^{-x}$.

(ii) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| \leqslant e^{-x}$, $\forall x \geqslant 0$. Donc la suite des fonctions f_n admet une fonction dominante $g(x) := e^{-x}$ (identique à f) intégrable sur $[0, +\infty[$. Ainsi d'après le **théorème de la convergence dominée**, la limite f est intégrable, et la suite $\left\{\int_0^{+\infty} |cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x} dx\right\}_{n\geqslant 1}$ est convergente (vers l'intégrale de f).

(iii) D'après le **théorème de la convergence dominée**, on a aussi
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} |cos(x)|^{\frac{1}{k}} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

UNIVERSITÉ D'EL-OUED | LICENCE MATHÉMATIQUES | 02 janvier 2017

Département de Mathématiques | $3^{ème}$ Année | Mesure et intégration

Mesure et intégrale de Lebesgue | **Examen** | (Durée : 1h.30mn)

Exercice 1 (5 points)

Étant donné un espace probabilisé $(E, \mathscr{E}, \mu)$, soient deux événements $A \in \mathscr{E}$ et $B \in \mathscr{E}$ tels que

$$\mu(A) = 0.6, \; \mu(B) = 0.4, \; \mu(A \cap B) = 0.2.$$

Calculer les probabilités des événements suivants

$$A \cup B, \; A^c, \; B^c, \; B \cap A^c, \; A \cup B^c, \text{ et } A^c \cup B^c.$$

Exercice 2 (8 points)

1. Énoncer le théorème de la convergence monotone.
2. Calcul de la limite : $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} |cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x} dx.$
   (i) Étudier la convergence, et déterminer la limite de la suite des fonctions
   $$f_n(x) := |cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x} \text{ définie pour } x \in [0, +\infty[\text{ et } n \geqslant 1.$$
   (ii) Montrer que la suite $\left\{ \int_0^{+\infty} |cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x} dx \right\}_{n \geqslant 1}$ est convergente.
   (iii) En déduire la valeur de la limite : $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} |cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x} dx.$

Exercice 3 (7 points)

Considérons une fonction $f : [0, 1] \longrightarrow [0, +\infty[$ mesurable, et posons $g := \chi_E$ avec $E := \{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}, \text{ tel que } y < f(x)\}$.

1. Montrer que
   (i) La fonction g est mesurable.
   (ii) $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x, y) dy.$
   (iii) $m(\{x \in [0, 1], \text{ tel que } f(x) > y\}) = \int_0^1 g(x, y) dx.$
2. En déduire (en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli) que

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^{+\infty} m\left(\{x \in [0, 1], \text{ tel que } f(x) > y\}\right) dy.$$

جامعة الشهيد حمة لخضر – الوادي 2017-01-02

كلية العلوم الدقيقة، قسم الرياضيات السنة الثالثة رياضيات

المادة: نظرية القياس و المكاملة **امتحان** المدة: 01 سا و30 د.

التمرين الأول : (5 نقاط)

ليكن $(E,\mathcal{E},\mu)$ فضاء احتمالات ، $A \in \mathcal{E}$ و $B \in \mathcal{E}$ حدثان بحيث

$$\mu(A) = 0.6 \text{ ، } \mu(B) = 0.4 \text{ ، } \mu(A \cap B) = 0.2$$

احسب احتمالات الأحداث التالية :

$$A \cup B \text{ ، } A^c \text{ ، } B^c \text{ ، } B \cap A^c \text{ ، } A \cup B^c \text{ ، } A^c \cup B^c$$

التمرين الثاني : (8 نقاط)

1- أكتب نص نظرية التقارب الرتيب.

2- حساب $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} |\cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x} dx$

i. ادرس التقارب، و حدد نهاية متتالية الدوال $f_n(x) := |\cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x}$ ، $x \in [0, +\infty[$ ، $n \geq 1$

ii. اثبت ان المتتالية $\left\{\int_0^{+\infty} |\cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x} dx\right\}_{n\geq 1}$ متقاربة.

iii. استنتج قيمة النهاية : $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} |\cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x} dx$

التمرين الثالث : (7 نقاط)

لتكن $f : [0, 1] \to [0, +\infty[$ دالة قابلة للقياس، و $g := \chi_E$ حيث $E := \{(x,y) \in [0, 1] \times \mathbb{R} : y < f(x)\}$.

1. اثبت ان

i. الدالة g قابلة للقياس.

ii. $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x,y)dy$

iii. $m(\{x \in [0, 1] : f(x) > y\}) = \int_0^1 g(x,y)dx$.

2. استنتج أن $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{+\infty} m(\{x \in [0, 1] : f(x) > y\})dy$ (استعن بنظرية Fubini-Tonelli).

UNIVERSITE D'EL-OUED | LICENCE MATHÉMATIQUES | 02 janvier 2017

Département de Mathématiques | $3^{ème}$ Année | Mesure et intégration

---

Mesure et intégrale de Lebesgue | **Examen** | (Durée : 1h.30mn)

Exercice 1 (5 points)

Etant donné un espace probabilisé $(E, \mathscr{E}, \mu)$, soient deux événements $A \in \mathscr{E}$ et $B \in \mathscr{E}$ tels que

$$\mu(A) = 0.6,\ \mu(B) = 0.4,\ \mu(A \cap B) = 0.2.$$

Calculer les probabilités des événements suivants

$$A \cup B,\ A^c,\ B^c,\ B \cap A^c,\ A \cup B^c,\ \text{et } A^c \cup B^c.$$

Exercice 2 (8 points)

1. Énoncer le théorème de la convergence monotone.
2. Calcul de la limite : $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} |cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x} dx$.
   (i) Étudier la convergence, et déterminer la limite de la suite des fonctions
   $$f_n(x) = |cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x} \text{ définie pour } x \in [0, +\infty[\text{ et } n \geqslant 1.$$
   (ii) Montrer que la suite $\left\{ \int_0^{+\infty} |cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x} dx \right\}_{n \geqslant 1}$ est convergente.
   (iii) En déduire la valeur de la limite : $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} |cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x} dx$.

Exercice 3 (7 points)

Considérons une fonction $f : [0, 1] \longrightarrow [0, +\infty[$ mesurable, et posons $g = \chi_E$ avec $E := \{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R},\ \text{tel que } y < f(x)\}$.

1. Montrer que
   (i) La fonction g est mesurable.
   (ii) $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x, y) dy$.
   (iii) $m(\{x \in [0, 1],\ \text{tel que } f(x) > y\}) = \int_0^1 g(x, y) dx$.
2. En déduire (en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli) que

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^{+\infty} m(\{x \in [0, 1],\ \text{tel que } f(x) > y\})\, dy.$$

Mesure et intégrale de Lebesgue — **Examen (corrigé)** — (Durée : 1h.30mn)

Exercice 1 (5 points)
Étant donné un espace probabilisé $(E, \mathscr{E}, \mu)$, soient deux événements $A \in \mathscr{E}$ et $B \in \mathscr{E}$ tels que

$$\mu(A) = 0.6, \ \mu(B) = 0.4, \ \mu(A \cap B) = 0.2.$$

Calculer les probabilités des événements suivants

$$A \cup B, \ A^c, \ B^c, \ B \cap A^c, \ A \cup B^c, \text{ et } A^c \cup B^c.$$

Solution :
Puisque $(E, \mathscr{E}, \mu)$ est un espace probabilisé ($\mu(E) < +\infty$), toutes les mesures d'ensembles mesurables (les probabilités d'événements) sont finies. On a donc

$$\boxed{\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) = 0.8}$$

$$\boxed{\mu(A^c) = 1 - \mu(A) = 0.4}, \qquad \boxed{\mu(B^c) = 1 - \mu(B) = 0.6}.$$

Puisque on peut exprimer B comme une union disjointe de $B \cap A$ et $B \cap A^c$:
$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$, on a $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c)$, d'où

$$\boxed{\mu(B \cap A^c) = \mu(B) - \mu(B \cap A) = 0.2},$$

et $$\boxed{\mu(A \cup B^c) = \mu((B \cap A^c)^c) = 1 - \mu(B \cap A^c) = 0.8}.$$

On a aussi $$\boxed{\mu(A^c \cup B^c) = \mu((A \cap B)^c) = 1 - \mu(A \cap B) = 0.8}.$$