سنة ثـــــانية رياضيـات

الامتحــان مع التصحيح النموذجي

السداسي الثـالث

الدورة العادية

التمرين الاول

تعطى f تماثل داخلي في IR^3 و مصفوفته في الاساس القانوني هي

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. عين كثير الحدود المميز لـ M مع حساب القيم الذاتية . استنتج ان كانت M قابلة للتقطر ؟ 1+2 ن
2. عين الفضاءات الجزئية الذاتية لـ M مع تعيين الاساس B لـ IR^3 المكون من اشعة ذاتية .

اكتب D مصفوفة f في الاساس B 0.5+01+1.5 ن

3. حل جملة المعادلات التفاضلية التالية 4 ن

$$Y'(t)=M.Y(t)$$

حيث $Y=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

التمرين الثاني :

لتكن a, b, c ثلاثة اعداد حقيقية مختلفة من IR. 10 ن

احسب كثير الحدود الاصغري لكل مصفوفة من المصفوفات التالية ثم هل هي قابلة التقطر ام لا ؟ - مع التبرير-

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} A_5 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

بالتوفيـــــــــــــــــــــــق

2017 - 2016 التصحيح النموذجي لاختبار الجبر 03.

قسم الرياضيات

التمرين الأول

1) كثير الحدود المميز لـ M

$$P_M(x) = det(M - xI)$$

$$= \begin{vmatrix} -x & 2 & -1 \\ 3 & -2-x & 0 \\ -2 & 2 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x+2 & 0 & x-2 \\ 3 & -2-x & 0 \\ -2 & 2 & 1-x \end{vmatrix} \quad L_1 = L_1 - L_3$$

$$= (x-2)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2-x & 0 \\ -2 & 2 & 1-x \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2-x & 3 \\ 2 & 2 & -1-x \end{vmatrix} \quad C_1 = C_1 + C_3$$

$$= -(x-2)\begin{vmatrix} -2-x & 3 \\ 2 & -1-x \end{vmatrix} = -(x-2)\begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 1-x & -1-x \end{vmatrix} \quad C_1 = C_1 + C_2$$

$$= -(x-2)(1-x)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1-x \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow P_M(x) = -(x-2)(x-1)(x+4) \quad 1 \qquad , Sp(M) = \{1, 2, -4\} \quad 1$$

لـ M لأنه قيم ذاتية مختلفة $1, 2, -4$ ومنه M قابلة للتقطير 1

2) الفضاء الذاتي E_1 المرافق للقيمة 1

ليكن $v = (x, y, z)$ من E_1 لدينا

$$(M - I)\,{}^t v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases}$$

ومنه

$$E_1 = Vect\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad 0,5$$

E_2 الفضاء الذاتي المرافق لـ 2

ليكن $U=(x,y,z)$ من E_2، لدينا

$$(M-2I_3)\,{}^tU=0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x+2y-z=0 & \text{①} \\ 3x-4y=0 & \text{②} \\ -2x+2y-z=0 & \text{③} \end{cases}$$

ومنه

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y = \frac{3}{2}x & \text{من ②} \\ -2x+\frac{3}{2}x = z & \text{من ①} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}(-2z) = -\frac{3}{2}z \end{cases}$$

ومنه

$$E_2 = Vect\left\{U_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$ 0.r

E_{-4} الفضاء الذاتي المرافق لـ -4

ليكن $U=(x,y,z)$ من E_{-4}، لدينا

$$(M-4I_3)\,{}^tU=0$$

بنفس الطريقة نجد

$$E_{-4} = Vect\left\{U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$ 0.r

تعيين أساس لـ $\mathbb{R}^3$: بما أن القيم الذاتية مختلفة فإن الأشعة الذاتية المرافقة

لها تكون مستقلة خطيا

ومنه U_1, U_2, U_3 مستقلة خطيا

وبما أن $\dim \mathbb{R}^3 = Card\{U_1, U_2, U_3\} = 3$

فإن $B=\{U_1, U_2, U_3\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$ 1

مصفوفة f وفق الأساس B هي:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$ 0.r

3- حل جملة المعادلات الخطية

لتكن $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ مصفوفة العبور من الأساس القانوني للأساس B و هي قابلة للقلب

لدينا $D = P^{-1}AP$

نضع $Z = P^{-1}Y$ ومنه المعادلة $Y' = MY$ تصبح:

$$PZ' = MPZ \Rightarrow Z' = P^{-1}MPZ$$ (بضرب طرفي المعادلة في P^{-1})

1 $\Rightarrow Z' = DZ$ لأن $D = P^{-1}AP$

$$\Rightarrow Z = K\exp(tD) \quad / \quad K = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$= (c_1, c_2, c_3)\begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}$$

ومنه 1 $Z = \begin{bmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{-4t} \end{bmatrix}$ $/ c_i \in \mathbb{R}$

ومنه نستنتج:

$$Y = PZ = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^t - 2c_2 e^{2t} + c_3 e^{-4t} \\ c_1 e^t - \frac{3}{2}c_2 e^{2t} - \frac{3}{2}c_3 e^{-4t} \\ c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-4t} \end{bmatrix}$$ 2

حل التمرين الثالث: في البداية نعلم أن جذور كثير الحدود الأصغري هي القيم الذاتية وتكون في قطر المصفوفة القطرية والمثلثية

• A_1 هي مصفوفة قطرية وبالتالي فهي قابلة للتقطير قيمه الذاتية هي ثلاثة أعداد مختلفة في القطر

وبالتالي كثير الحدود الأصغري لـ A هو

$$m_{A_1}(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$$

• A_2 هي مصفوفة قطرية وبالتالي قابلة للتقطير، قيمه الذاتية a بسيطة و b مضاعفة.

وبما أن A قابلة للتقطير فإن كثير الحدود الأصغري تكون جذوره بسيطة وبالتالي فإن

$$m_{A_2}(x) = (x-a)(x-b)$$

• A_3 مصفوفة مثلثية، قيمها الذاتية a بسيطة و b مضاعفة

بما أننا لا نعلم إن كانت A_3 قابلة للتقطير فعلينا الحساب.

كثير الحدود الأصغري لـ A_3 هو إما $(x-b)(x-a)$ أو $(x-b)^2(x-a)$

لدينا $(A_3-aI_3)(A_3-bI_3)\neq 0$ ومنه فإن كثير الحدود الأصغري هو $m_{A_3}(x)=(x-b)^2(x-a)$

b جذر مضاعف لـ m_{A_3} ومنه A_3 غير قابلة للتقطير

• A_4 مصفوفة قطرية لها قيمة ذاتية a (مضاعفة 3) وبالتالي فهي قابلة للتقطير

لدينا A قابلة للتقطير فإن جذور كثير الحدود الأصغري تكون بسيطة وبالتالي فإن

$$m_{A_4}(x) = (x-a)$$

• A_5 مصفوفة مثلثية لها قيمة ذاتية واحدة a مضاعفة 3

حسب كثير حدودها الأصغري الذي هو إما $x-a$ أو $(x-a)^2$ أو $(x-a)^3$

لدينا $A_5-aI_3\neq 0$ و $(A_5-aI_3)^2=0$ ومنه فإن كثير الحدود الأصغري لـ A_5 هو $m_{A_5}(x)=(x-a)^2$ وبما أن a ليس جذر بسيط لـ m_{A_5} فإن A_5 غير قابل للتقطير

كلية العلوم الدقيقة	السنة الثانية رياضيات
قسم الرياضيات اختبار في مقياس المنطق الرياضي	السنة الدراسية 2016-2017

التمرين الاول : (5 نقاط)

هل القضايا التالية صحيحة ام خاطئة و لماذا :

1) $\exists x \in IR^*, \forall y \in IR^*, \forall z \in IR^* : z-xy=0$

2) $\forall y \in IR^*, \exists x \in IR^*, \forall z \in IR^* : z-xy=0$

3) $\forall y \in IR^*, \forall z \in IR^*, \exists x \in IR^* : z-xy=0$

4) $\exists a \in IR , \forall \varepsilon > 0 : |a| < \varepsilon$

5) $\forall \varepsilon > 0 , \exists a \in IR: |a| < \varepsilon$

ملاحظة: لا تحسب الاجابة الا مع التبرير الصحيح

التمرين الثاني : (4 + 4 نقاط)

لتكن القضايا التالية

$$A \equiv P \wedge \neg (Q \vee \neg R) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow (P \vee Q)$$

$$B \equiv (P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$$

1. هل هذه القضايا بينة ام متناقضة ام قابلة للتحقق مع التبرير
2. اكتب القضية A على شكل انصالي بطريقتين مختلفتين (احدهما باستعمال جدول الحقيقة).

التمرين الثالث : (1+2+1 نقاط)

برهن بالتراجع صحة الخاصية التالية

من اجل كل عدد طبيعي n فان $7^n - 2^n$ مضاعف للعدد 5.

التمرين الرابع : (3 نقاط)

ثلاثة اصدقاء نرمز لاسمائهم بـ A, B, C لديهم ثلاثة مهن مختلفة

يعطى

(B استاذ) ⟸ (A طبيب) ، (B قاضي) ⟸ (A استاذ) ، (C استاذ) ⟸ (B ليس طبيب)

اذا علمت صدق هذه الاستلزامات الثلاثة فما هي مهن كل واحد منهم مع توضيح الطريقة ؟

بالتوفيـــــــــــــــــــــــق

جامعة الوادي
كلية العلوم الدقيقة
قسم الرياضيات

السنة الثانية رياضيات
2017 - 2018

التصحيح النموذجي
لمقياس المنطق الرياضي

التمرين الأول

1) خاطئة، لأن بتعيين قيمة ل x من $\mathbb{R}^*$ ومهما اخترنا أي قيمة ل y من $\mathbb{R}^*$ فإنه يوجد $z = xy+1$ من $\mathbb{R}^*$ بحيث $z - xy \neq 0$ (1)

2) خاطئة، لأن مهما اخترنا y من $\mathbb{R}^*$ وبتعيين أي قيمة x من $\mathbb{R}^*$ فإنه مهما اخترنا $z = xy+1$ من $\mathbb{R}^*$ فإن $z - xy \neq 0$ (1)

3) صحيحة، لأن مهما اخترنا أي قيمة y من $\mathbb{R}^*$ و z من $\mathbb{R}^*$ متوجد $x = \frac{z}{y}$ من $\mathbb{R}^*$ بحيث $z - xy = 0$ (1)

4) صحيحة، يكفي أخذ $a = 0$ لتحقيق المتباينة $|a| < \varepsilon$ (1)

5) صحيحة، يكفي أخذ $a = \frac{\varepsilon}{2}$ ، $|a| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ (1)

التمرين الثاني

P	Q	R	$Q \vee \neg R$	$\neg(Q \vee \neg R)$	$P \vee Q$	$\neg Q \Rightarrow (P \vee Q)$	$P \wedge \neg(Q \vee \neg R)$	A
1	1	1	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0	1

1) القضية A بسيطة (2)

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$	$(Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$	B
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

من جدول الحقيقة القضية B بديهية

2

2) اكتب القضية A على شكل اتصالي

الطريقة الأولى . من جدول الحقيقة القضية A بديهية و بالتالي نكتب

$A \equiv \boxed{1}$

2

الطريقة الثانية

$A \equiv P \wedge \neg(Q \vee \neg R) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow (P \vee Q))$

a) نحذف $\Rightarrow$ و $\Leftrightarrow$

$\equiv \neg[P \wedge \neg(Q \vee \neg R)] \vee [\neg\neg Q \vee (P \vee Q)]$

b) ادخال النفي داخل الأقواس

$\equiv [\neg P \vee (Q \vee \neg R)] \vee (Q \vee (P \vee Q))$

$\equiv \neg P \vee Q \vee \neg R \vee Q \vee P \vee Q$

$\equiv \neg P \vee P \vee Q \vee \neg R \equiv 1 \vee Q \vee R \equiv \boxed{1}$ 2

لأن $\vee$ تجميعي وتبديلي

و لأن $Q \vee Q \equiv Q$

تمرين السادس

نص الخاصية $P(n)$: « $n \in \mathbb{N}$; $7^n - 2^n$ يقبل القسمة على 5 »

1) الابتدائية ، $n = 0$

$$7^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0 = 0.5$$

اي $7^0 - 2^0$ يقبل القسمة على 5 (مضاعف لـ 5)

ومنه $P(0)$ صحيحة ①

2) التوريثي ، نفرض ان الخاصية محققة من اجل $n \in \mathbb{N}$ اي

$7^n - 2^n$ مضاعف لـ 5 ، مع فرض التراجع (ف ت)

ونبرهن على صحة الخاصية من اجل $n+1$ اي

$7^{n+1} - 2^{n+1}$ مضاعف لـ 5

لدينا $7^{n+1} - 2^{n+1} = 7 \times 7^n - 2 \times 2^n = (5+2)7^n - 2 \times 2^n$

$$= 5.7^n + 2(7^n - 2^n)$$

$$= 5.7^n + 2(5K)$$

لأن حسب ف ت $7^n - 2^n$ يقبل القسمة على 5 اي ~~يوجد~~ يوجد $K \in \mathbb{Z}$ بحيث $7^n - 2^n = 5K$

$$7^{n+1} - 2^{n+1} = 5(7^n + 2K)$$

ومنه

$7^{n+1} - 2^{n+1}$ يقبل القسمة على 5 (مضاعف لـ 5)

ومنه

ومنه $P(n+1)$ صحيحة ②

3) النتيجة: من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ فان $P(n)$ صحيحة ①
(ق)

التمرين الرابع :

لدينا B استاذ ⟸ A طبيب (1)

A قاضي ⟸ A استاذ (2)

C استاذ ⟸ B ليس طبيب (3)

A اما يكون طبيب او استاذ او قاضي

اذا فرضنا A قاضي فان الاستلزام (1) و (2) صحيحا

ونستنتج منهما ان B اما طبيب او استاذ

اذا فرضنا ان B استاذ فمن الاستلزام (3) نجد C ايضا طبيب وهذا تناقض

لهذا فاننا نفرض ان B طبيب ومن الاستلزام (3) نجد ان C استاذ ج

ومنه فان A قاضي و B طبيب و C استاذ تحقق الاستلزامات هو

بالملاحظة . اذا فرضنا ان A ليس قاضي ينتج تناقض

جامعة الشهيد محمد الأخضر حمة بالـــوادي

كلية العلوم الدقيقة | سنة 2 رياضيات
قسم الرياضيات | 2017/01/08
شعبة الرياضيات | المدة: ساعة و نصف

اختبار مقياس الطبولوجيا

أسئلة مباشرة: (1+1+1 نقاط) عين الاجابة الصحيحة مما يلي:

1) A جزء كثيف من فضاء طبولوجي X، اذن: i) $\overset{\circ}{\overline{A}} = X$ ii) $\overset{\circ}{\overline{A}} = A$ iii) $\overset{\circ}{\overline{A}} = \phi$

2) إذا كان (E,d) فضاء متري و F مغلق فإن: i) $\exists x \in F^C, d(x,F) = 0$ ، ii) $\forall x \in F^C, d(x,F) \neq 0$.

3) إذا كان X فضاء طبولوجي تام و A جزء متراص من X فإن: i) A تام ii) A غير تام iii) لا يمكن الاستنتاج.

التمرين 1: (1+2+2 نقاط)

1) لتكن B, A مجموعتين جزئيتين كيفيتين من مجموعة X و U مفتوح من الفضاء الطبولوجي $(X,\mathcal{T})$.
اثبت أن $(A-B)\cap U = A\cap(U-B)$.

2) برهن أن $\overline{A}-\overline{B} \subset \overline{A-B}$. (لاحظ أن $U-\overline{B}$ هو مفتوح).

3) نزود $\mathbb{R}$ بالطبولوجيا العادية، ونعتبر المجموعتين $A = [-1,1]$ ، $B = \{0\}$. عين كل من $\overline{A}-\overline{B}$ و $\overline{A-B}$.

التمرين 2: (4 نقاط) ليكن $f : (X,\Im_1) \to (Y,\Im_2)$ تطبيق من الفضاء الطبولوجي $(X,\Im_1)$ نحو الفضاء الطبولوجي $(Y,\Im_2)$

برهن أن $[f$ مستمر$] \Leftrightarrow \left[\forall A \subset Y, f^{-1}\left(\overset{\circ}{A}\right) \subset \overset{\circ}{\overline{f^{-1}(A)}}\right]$ (تذكير: f مستمر $\Leftarrow$ $f^{-1}\left(\overset{\circ}{A}\right)$ هو مفتوح ، $f^{-1}\left(\overset{\circ}{U}\right) \subset f^{-1}(U)$.

التمرين 3: (1+2+2+1+2 نقاط) لتكن X مجموعة غير خالية و $\varphi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ تطبيق له الخواص التالية:

i) $\varphi(X) = X$ ii) $\forall A \subset X, \varphi(A) \subset A$ iii) $\varphi(\varphi(A)) = \varphi(A)$ iv) $\forall A, B \subset X, \varphi(A\cap B) = \varphi(A)\cap\varphi(B)$

لتكن $\mathcal{T} = \{U = \varphi(A); A \in \mathcal{P}(A)\}$ أسرة جزئية من $\mathcal{P}(A)$ (أي أن $U \in \mathcal{T}$ اذا كان يكتب من الشكل $U = \varphi(A)$ من أجل $A \subset X$).

1) بين أن X, ϕ تنتميان الى $\mathcal{T}$.

2) بين انه إذا كان $A \subset B$ فإن $\varphi(A) \subset \varphi(B)$. (لاحظ أن $A = A\cap B$). إستنتج أن $\bigcup_{i\in I}\varphi(A_i) \subset \varphi\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$.

3) بين أن $\bigcup_{i\in I}\varphi(A_i) = \varphi\left(\bigcup_{i\in I}\varphi(A_i)\right)$ (لاحظ أن $\bigcup_{i\in I}\varphi(A_i) = \bigcup_{i\in I}\varphi(\varphi(A_i)) \subset \varphi\left(\bigcup_{i\in I}\varphi(A_i)\right)$).

4) استنتج أن $\mathcal{T}$ مستقرة بالنسبة للإتحاد ثم بين أن $\mathcal{T}$ هي طبولوجيا على X .

5) اثبت أنه من أجل $A \in X$ يكون $\overset{\circ}{A} = \varphi(A)$. (مساعدة: $\varphi\left(\overset{\circ}{A}\right) = \overset{\circ}{A}$).

جامعة الشهيد محمد الاخضر عمارة بالــوادي

كلية العلوم الدقيقة — سنة 2 رياضيات

قسم الرياضيات — 2017/01/08

شعبة الرياضيات — المدة: ساعة و نصف

حلول اختبار مقياس الطبولوجيا

أسئلة مباشرة: (1+1+1 نقاط) عين الاجابة الصحيحة مما يلي:

1) A جزء كثيف من فضاء طبولوجي X، اذن: i) $\mathring{\overline{A}} = X$ ii) $\mathring{\overline{A}} = A$ iii) $\mathring{\overline{A}} = \phi$

بما أن A كثيف في X فإن $\overline{A} = X$ وبما أن X مفتوح فإن $\mathring{\overline{A}} = X$.

2) إذا كان $\left(E,d\right)$ فضاء متري و F مغلق فإن: i) $\exists x \in F^C, d\left(x,F\right) = 0$، ii) $\forall x \in F^C, d\left(x,F\right) \neq 0$.

بما أن F مغلق فإن $x \in F \Leftrightarrow d\left(x,F\right) = 0$ وعليه يكون $\forall x \in F^C, d\left(x,F\right) \neq 0$

3) إذا كان X فضاء طبولوجي تام و A جزء متراص من X فإن: i) A تام، ii) A غير تام، iii) لا يمكن الاستنتاج.

A جزء متراص اذن A مغلق، A مغلق و X فضاء طبولوجي تام إذن A تام.

التمرين 1: (1+2+2 نقاط)

1) لتكن B, A مجموعتين جزئيتين **كيفيتين** من مجموعة X و U مفتوح من الفضاء الطبولوجي (X,T).

اثبت أن $(A-B)\bigcap U = A\bigcap\left(U-B\right)$.

$$(A-B)\bigcap U = \left\{x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in U\right\} = \left\{x \in A \wedge x \in U \wedge x \notin B\right\} = A\bigcap\left(U-B\right)$$

2) برهن أن $\overline{A} - \overline{B} \subset \overline{A-B}$. (لاحظ أن $U - \overline{B}$ هو مفتوح).

لتكن $x \in \overline{A} - \overline{B}$ إذن $x \in \overline{A} \wedge x \notin \overline{B}$. ليكن U مفتوح يشمل x إذن $x \in \left(U - \overline{B}\right)$ وهو مفتوح، بما أن $x \in \overline{A}$ فإن $\left(U-\overline{B}\right)\bigcap A \neq \phi$ وبما أن $U - \overline{B} \subset U - B$ فإن $\left(U-B\right)\bigcap A \neq \phi$ ومن السؤال السابق يكون $U\bigcap\left(A-B\right) \neq \phi$ وعليه يكون $x \in \overline{A-B}$.

3) نزود $\mathbb{R}$ بالطبولوجيا العادية، ونعتبر المجموعتين $A = \left[-1,1\right]$، $B = \left\{0\right\}$. عين كل من $\overline{A} - \overline{B}$ و $\overline{A-B}$.

B, A مغلقين إذن $\overline{A} = \left[-1,1\right]$، $\overline{B} = \left\{0\right\}$ و $\overline{A} - \overline{B} = \left[-1,0\right[\bigcup\left]0,1\right]$. و $A - B = \left[-1,0\right[\bigcup\left]0,1\right]$

أي أن $\forall \varepsilon > 0, \left]-\varepsilon,\varepsilon\right[\bigcap\left(\left[-1,0\right[\bigcup\left]0,1\right]\right) \neq \phi$ وبالتالي $0 \in \overline{A-B}$ و $\overline{A-B} = \left[-1,1\right]$.

التمرين 2: (4 نقاط) ليكن $f : \left(X,\Im_1\right) \to \left(Y,\Im_2\right)$ تطبيق من الفضاء الطبولوجي $\left(X,\Im_1\right)$ نحو الفضاء الطبولوجي $\left(Y,\Im_2\right)$

برهن أن $\left[f \text{ مستمر}\right] \Leftrightarrow \left[\forall A \subset Y, f^{-1}\left(\mathring{A}\right) \subset \overbrace{f^{-1}(A)}^{\circ}\right]$ (تذكير: f مستمر $\Leftarrow$ $f^{-1}\left(\mathring{A}\right)$ هو مفتوح. $f^{-1}\left(\mathring{U}\right) \subset f^{-1}(U)$.

1) نفرض أن [f مستمر] بما أن $\mathring{A}$ مفتوح فإن $f^{-1}\left(\mathring{A}\right)$ مفتوح و $f^{-1}\left(\mathring{A}\right) \subset f^{-1}(A)$ بالتالي $f^{-1}\left(\mathring{A}\right) \subset \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(A)}}$.

2) ليكن U مفتوح من Y إذن $U = \mathring{U}$، نفرض أن f مستمر لنبرهن أن $f^{-1}(U)$ مفتوح.

$\overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(U)}} \subset f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\mathring{U}\right) \subset \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(U)}}$ وعليه يكون $f^{-1}(U) = \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(U)}}$ أي أن $f^{-1}(U)$ مفتوح، وبالتالي f مستمر.

<u>التمرين 3</u>: **(1+2+2+1+2 نقاط)** لتكن X مجموعة غير خالية و $\varphi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ تطبيق له الخواص التالية:

i) $\varphi(X) = X$ ii) $\forall A \subset X, \varphi(A) \subset A$ iii) $\varphi(\varphi(A)) = \varphi(A)$ iv) $\forall A, B \subset X, \varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$

لتكن $\mathcal{T} = \{U = \varphi(A); A \in \mathcal{P}(A)\}$ أسرة جزئية من $\mathcal{P}(A)$ (أي أن $U \in \mathcal{T}$ إذا كان يكتب من الشكل $U = \varphi(A)$ من أجل $A \subset X$).

1) بين أن X, ϕ تنتميان الى $\mathcal{T}$.

من i) لدينا $\varphi(X) = X$ إذن $X \in \mathcal{T}$، ومن ii) لدينا $\phi \subset \varphi(\phi) \subset \phi$ وعليه $\varphi(\phi) = \phi$ و $\in \mathcal{T}$.

2) بين أنه إذا كان $A \subset B$ فإن $\varphi(A) \subset \varphi(B)$، (لاحظ أن $A = A \cap B$)، استنتج أن $\bigcup_{i \in I} \varphi(A_i) \subset \varphi\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$.

من iv) لدينا $\varphi(A) = \varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$ وبالتالي $\varphi(A) \subset \varphi(B)$.

$\forall i \in I, A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ وبالتالي $\forall i \in I, \varphi(A_i) \subset \varphi\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ وعليه يكون $\bigcup_{i \in I} \varphi(A_i) \subset \varphi\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$.

3) بين أن $\bigcup_{i \in I} \varphi(A_i) = \varphi\left(\bigcup_{i \in I} \varphi(A_i)\right)$ (لاحظ أن $\bigcup_{i \in I} \varphi(A_i) = \bigcup_{i \in I} \varphi(\varphi(A_i)) \subset \varphi\left(\bigcup_{i \in I} \varphi(A_i)\right)$).

من ii) يكون $\bigcup_{i \in I} \varphi(A_i) \subset \varphi\left(\bigcup_{i \in I} \varphi(A_i)\right) \subset \bigcup_{i \in I} \varphi(\varphi(A_i)) = \bigcup_{i \in I} \varphi(A_i)$ وهذا يؤدي الى

$\varphi(V) = \varphi\left(\bigcup_{i \in I} \varphi(A_i)\right) = \bigcup_{i \in I} \varphi(A_i)$ أي أن $\bigcup_{i \in I} \varphi(A_i) \in \mathcal{T}$.

4) استنتج أن $\mathcal{T}$ مستقرة بالنسبة للإتحاد ثم بين أن $\mathcal{T}$ هي طوبولوجيا على X.

من iv) $\mathcal{T}$ مستقرة بالنسبة للتقاطع، وبالتالي $\mathcal{T}$ تعرف طبولوجيا على X.

5) أثبت أنه من أجل $A \in X$ يكون $\mathring{A} = \varphi(A)$. (مساعدة: $\varphi\left(\mathring{A}\right) = \mathring{A}$).

$\mathring{A}$ مفتوح فهو يكتب من الشكل $\mathring{A} = \varphi(V)$ وبالتالي $\varphi\left(\mathring{A}\right) = \varphi(\varphi(V)) = \varphi(V) = \mathring{A}$.

لدينا $\varphi(A) \subset A$ وهو مفتوح إذن $\varphi(A) \subset \mathring{A}$، من جهة ثانية $\mathring{A} \subset A \Rightarrow \varphi\left(\mathring{A}\right) \subset \varphi(A)$ أي $\mathring{A} \subset \varphi(A)$ ومن ثم المساواة.

جامعة محمد الأخضر أعماره الوادي
كلية العلوم الدقيقة

قسم الريـــــاضيـــات — التاريخ : 04 / 01 / 2017
مستوى الثانية رياضيات — المـــدة : ســاعة ونصف

امتحان الدورة العادية في مقياس التحليل (3)

تنظيم الإجابة وخلوها من التشطيب ضروري ويؤخذ بعين الاعتبار (01 نقطة)

التمرين الأول (06 نقاط) :

$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ سلسلة توابع حدها العام معرف على $[0,1]$ بـ : $U_n(x) = x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}$

1. بيّن أن هذه السلسلة متقاربة ببساطة على $[0,1]$ نحو تابع S يطلب تحديده .
2. أثبت أن S غير مستمر على $[0,1]$، لكن $\sum_{n\geq 1} \int_0^1 U_n(x)\,dx = \int_0^1 S(x)\,dx$
3. استنتج أن $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ لا يمكن أن تتقارب نظيميا على $[0,1]$.

التمرين الثاني (08 نقاط) :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع فردي و 2π - دوري معرف على $[0,\pi]$ بـ : $f(x) = \begin{cases} 1 \,;\, 0 < x < \pi \\ 0 \,;\, x = 0 \vee x = \pi \end{cases}$

1. احسب $(a_n)_{n\in N}$ و $(b_n)_{n\in N^*}$ معاملات سلسلة فورييه المرافقة لـ f
2. أثبت أن f مرن ثم بين صحة المساواة : $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x,\ \forall x \in \mathbb{R}$
3. برهن أن السلسلتين العدديتين $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ و $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ متقاربتان ثم احسب مجموعهما.

التمرين الثالث (05 نقاط) :

ليكن I التكامل الموسع المعرف بـ : $I = \int_1^{+\infty} a^{\sqrt{x}}\,dx$ حيث $0 < a < 1$

1. بين أن $I = 2\int_1^{+\infty} t a^t\,dt$
2. ادرس طبيعة التكامل I
3. استنتج طبيعة السلسلة العددية $\sum_{n\geq 1} a^{\sqrt{n}}$ مستخدما التكامل I.

تمنياتي للجميع بالتوفيق

جامعة محمد الأخضر حمة الوادي

كلية العلوم الدقيقة

قسم الرياضيات

مستوى الثانية رياضيات

مقياس : التحليل (3)

تاريخ الإجراء : 2017/01/04

التصحيح النموذجي في سلم التنقيط لامتحان الدورة العادية

حل التمرين الأول (06 نقاط)	العلامة مجزأة	العلامة كاملة
1. ليكن S_n المجموع الجزئي من الرتبة n للسلسلة إذاً $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x) = -x + x^{\frac{1}{n+1}}$	0,5	
وبالتالي : $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0 ; & x = 0 \\ 1-x ; & x \in]0,1] \end{cases}$	0,5 0,5	01,5
أي أن السلسلة $\sum_{n\geq 1} U_n(x)$ متقاربة ببساطة على $[0,1]$ نحو $S(x)$		
2. إن : $\lim_{x \to 0^+} S(x) = 1 \neq S(0) = 0$	0,5	
ومنه S غير مستمر عند 0 فهو إذاً غير مستمر على $[0,1]$.	0,5	02
لكن : $\sum_{n\geq 1} \int_0^1 U_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2}$	0,5	
$\int_0^1 S(x)\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx = \frac{1}{2}$	0,5	
ومنه فإن : $\sum_{n\geq 1} \int_0^1 U_n(x)\,dx = \int_0^1 S(x)\,dx$		
3. مادام S غير مستمر على $[0,1]$ وكل حدود السلسلة مستمرة على $[0,1]$	0,5×2	
فإن $\sum_{n\geq 1} U_n(x)$ غير متقاربة بانتظام على $[0,1]$ حسب خاصية استمرار سلسلة توابع	0,5×2	02,5
وعليه فإنها غير متقاربة نظيميا على $[0,1]$ حسب نظرية فيرشتراس.	0,5	

حل التمرين الثاني (08 نقاط)	مجزأة	كاملة
1. مادام f فرديا فإن : $a_0 = 0$ و $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$	0,5×2	02
$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx\,dx = -\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0 ; & n = 2p \\ \frac{4}{(2p-1)\pi} ; & n = 2p-1 \end{cases}, p \in \mathbb{N}^*$	0,5×2	
2. إن نقاط تقطع f من الشكل : $x_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ وتحقق f عند كل منها :	0,25	
$\frac{f(x_{2k+1}^+) + f(x_{2k+1}^-)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0 = f(x_{2k+1})$	0,25	
$\frac{f(x_{2k}^+) + f(x_{2k}^-)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 = f(x_{2k})$	0,25	
ومنه فإن f مرن في $\mathbb{R}$.		

.../يتبع/...

كاملة	مجزأة	تابع لحل التمرين الثاني
	$0,25\times 2$	لاحظ أن: ① f دوري ودوره 2π ② f محدود لأن $\forall x\in\mathbb{R}, \lvert f(x)\rvert \leq 1$
	0,25	③ f رتيب لأنه ثابت على المجالات $I_k =]2k\pi, (2k+1)\pi[$ ، $J_k =](2k-1)\pi, 2k\pi[$ ، $k\in\mathbb{Z}$
03	0,25	④ . f مستمر بالأجزاء على كل مجال I_k و J_k
	0,25	ومنه حسب نظرية ديريشلي فإن سلسلة فورييه المرافقة لـ f تتقارب من
	$0,25\times 3$	أجل كل $x\in\mathbb{R}$ نحو $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$. لكن f مرن وبالتالي تتقارب نحو $f(x)$ من أجل $x\in\mathbb{R}$
	0,25	فهو إذا قابل للنشر إلى سلسلة فورييه المرافقة له، ومنه المساواة 7 محققة .
	0,5	3. بتطبيق نظرية ليبنيز فإن $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ سلسلة عددية متقاربة لحساب مجموعها
03	$0,5\times 2$	نضع $\frac{\pi}{2} = x$ لنجد $1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ وبالتالي : $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{2n-1} = -\frac{\pi}{4}$
	0,5	بتطبيق معيار التكافؤ فإن $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)^2}$ سلسلة عددية متقاربة لحساب مجموعها
	$0,5\times 2$	نطبق بارسوفال لنجد : $2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)^2}$ أي أن، $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

كاملة	مجزأة	حل التمرين الثالث (05 نقاط)
01	$0,5\times 2$	1. نستخدم تبديلا للمتغير x : $t=\sqrt{x}$ إذاً $dx = 2t\,dt$ وعليه $I = 2\int_1^{+\infty} t a^t\,dt$
1,5	$0,5\times 3$	2. لنحسب I عن طريق التكامل بالتجزئة لنجد: $I = \frac{2a}{\ln a}\left(\frac{1}{\ln a} - 1\right)$ ومنه I متقارب
		كما يمكن إثبات تقارب التكامل I بطريقة أخرى :
		$\lim_{t\to\infty} t^{\alpha+1} a^t = 0$ حيث $\alpha > 1$ وحيث أن $\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$ متقارب فإن I متقارب كذلك
		3. نعتبر f التابع المعرف على $[1,+\infty[$ بـ : $f(x) = a^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\ln a}$
	0,25	إن ① f تابع موجب لأن $\forall x\in[1,+\infty[; f(x) \geq 0$
	0,25	② f متناقص لأن $1\leq x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1}\ln a > \sqrt{x_2}\ln a \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
02,5	0,25	③ f تابع مستمر لأنه تركيب تابعين مستمرين
	0,25	④ f يحقق : $f(n) = a^{\sqrt{n}}$
	0,5	وبالتالي حسب المعيار التكاملي فإن طبيعة السلسلة العددية $\sum_{n\geq 1} a^{\sqrt{n}}$
	$0,5\times 2$	من طبيعة التكامل I وحيث أن I متقارب فإن السلسلة متقاربة

01	$0,5\times 2$	تنظيم الإجابة & خلوها من التشطيب

جامعة الوادي
المقياس: أدوات البرمجة
السداسي الثالث
المدة : 1سا و 30د

كلية العلوم الدقيقة

قسم الرياضيات
السنة الثانية
السنة الجامعية : 2016/2017
الدورة العادية

الاسم :............... اللقب : .... الفوج : .... رقم التسجيل :...............

تصحيح امتحان الدورة العادية في مقياس أدوات البرمجة (MATLAB)

تمرين 1 : (3 نقاط)

ضع علامة (×) في الخانة التي يرسل من أجلها Matlab رسالة تقرير عن الخطأ

0.5 det(Eye(3)) = 1 ☒ ، 0.5 ln(10) = ln(2*5) ☒ ، 0.5 3 < -5 ☐ ، 0.5 (0 == 0)&(1 < 1) ☐ ، 0.5 6 ~= 6 ☐ ،

0.5 sqrt(2)^2 = 3 ☒ ،

تمرين 2 : (6 نقاط)

اكتب برنامج بلغة Matlab في نافذة الأوامر يقوم برسم منحنيي الدالتين f و g في نفس المعلم باللونين الأحمر و الأسود على الترتيب في المجال $[1,5]$ بالخطوة $h = 0.01$ حيث :

$$f(x) = 1 + 2x + \sin(x^2) \text{ و } g(x) = \sin(x) + 0.5x\cos(3x)$$

```
01   x = 1:0.01:5;
01   f = 1 + 2.*x + sin(x.^2);
01   g = sin(x) + 0.5.*x.*cos(3.*x);
0.5  hold on
0.5  plot(x,f,'r');
0.5  plot(x,g,'k');
0.5  hold off
01   shg
```

تمرين 3 : (8 نقاط)

نعرف النظيم الثاني لمصفوفة $A \in M_{N,M}(R)$ كالآتي:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}(A_{ij}^2)}$$

اكتب برنامج بلغة Matlab في ملف من النوع M-file بطريقتين مختلفتين يقوم بحساب النظيم الثاني لمصفوفة كيفية $A \in M_{N,M}(R)$

طريقة 1 :

```
04   A = input('A=');
     normA = sqrt(sum(sum(A.^2)))
```

طريقة 2 :

```
A= input('A=');
N= size(A,1);
M= size(A,2);
a=0;
for i=1:N;
    for j=1:M;
    a= a+ A(i,j).^2 ;
    end
end
normA= sqrt(a)
```

04

تمرين 4 : (3 نقاط)

أذكر ثلاث ميزات أساسية تجعلنا نفضل كتابة البرامج بلغة Matlab في ملفات من نوع M-file بدل كتابتها في نافذة الأوامر

- البرامج من النوع M-file يمكننا إعادة تنفيذها مع مدخلات جديدة دون إعادة كتابتها من جديد. 01
- البرامج من النوع M-file يمكننا تصحيح الأخطاء الموجودة فيها من دون أن نحدث تغييرات على باقي أجزاء البرنامج 01
- البرامج من النوع M-file تسمح بتعريف وإضافة دوال جديدة إلى مكتبة دوال Matlab. 01

بالتوفيق

جامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي
كلية العلوم الدقيقة

سنة ثانية رياضيات
الموسم الجامعي 2017/2016

امتحان السداسي الأول لمقياس تاريخ الرياضيات

التمرين الأول:

1. بدأ علم الفلك في المرحلة الثانية (من 7 إلى 6 قرون قبل الميلاد) دراسة منها ما هو في السماء (هذا من ناحية العلمية) وأخرى منها ما هو موجود ما وراء السماء (أي الفلسفية منها واللاهوتية).

- تكلم عن هذا العلم في هذه المرحلة في بضعة أسطر من الناحية العلمية (و هو كان تتحدث عن أهم كتاب في هذا الصدد)

2. في بعض جوانب الرياضيات العربية خلال القرون الممتدة من الثامن الميلادي إلى السادس عشر الميلادي عرفت الرياضيات العربية في نطاق الحضارة الإسلامية أربع مراحل هامة.

- اذكر خاصية كل مرحلة مع تحديد تاريخها حسب الترتيب الزمني.

3. ما هي الكتب المترجمة مع ذكر التواريخ من طرف:

- الحجاج بن يوسف بن مطر
- ثابت بن قرة الحراني
- قسطا بن لوقا البعلبكي

التمرين الثاني:

I. أكتب في نضام العد المصري القديم الأعداد الآتية:

12111, 2/3, 1/8, 1/16

II. أكتب في نضام العد البابلي الأعداد:

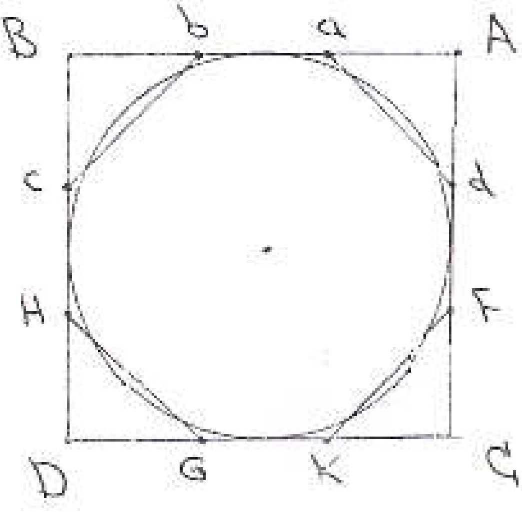
270, 49

III. اختار ثلاث أعداد طبيعية ثم أعد كتابتها في نظام العد اليوناني

التمرين الثالث:

قيمة العدد $\pi = 3.1406$ عند المصريين ترجع إلى المسألة 48 من بردية ريند وهي كالآتي:
نرسم في مربع طول ضلعه 9 وحدات قياسية مثمن و دائرة تحيط بهي داخليا كما في الشكل التالي:

- اشرح هندسيا كيف توصل القدماء إلى القيمة التقريبية 3.1605 للعدد π



ملاحظة: الرسم غير اجباري

الإجابة النموذجية لامتحان السداسي الأول لمقياس تاريخ الرياضيات

اليوم الخامس جانفي / 2013

التمرين الأول: (7 نقاط)

1- أهم كتاب وصلنا في علم الفلك هو كتاب المجسطي لبطليموس

0,5 نقطة   0,5 نقطة

وهذا الاسم استعار من يوناني محض عند ترجمته إلى العربية ووصف الكتاب

0,5 نقطة

الكبير وقد عرفه الأوروبيون باسم (La Syntaxe de Ptolémée) في

بداية الأمر ويعد من أمهات الكتب في الفلك إلى حد الآن

0,5 نقطة

كما يشتمل على الهندسة الكروية وبعض أساسيات المثلثات

0,5 نقطة   0,5 نقطة

الفلكية عند العرب، ابتداء من القرن 8م.

-2-

(0,25) 2-1- مرحلة الاكتشافات الأولى أو عن الماضي للرياضيات من قبل

شعوب أخرى خلال الفترة [ق 8م – ق 9م]

(0,25) 2-2- مرحلة الإبداع والابتكار وإعداد العصر الذهبي خلال ق 9م – ق 12م

(0,5) 2-3- مرحلة تقبل مجموعة من الأفكار الجديدة والكتب العلمية إلى

أوروبا خلال الفترة [ق 12م – ق 14م]

(0,5) 2-4- مرحلة الجمود وتوقف حركة الإنتاج العلمي خلال ق 15م – ق 19م

-4-

4-1- الكتب التي ترجمها الحجاج بن يوسف بن مطر (833م)

(0,5) كتاب الأصول لإقليدس والمجسطي لبطليموس

أما ثابت بن قرة (٩٠١م) كتاب الأصول لإقليدس، كتاب المدخل إلى علم العدد لنيقوماخوس الجرشي و كتاب الكرة والأسطوانة لأرخميدس (0,5) (0,5)
و أما قسطا بن لوقا (ت ٩١٢م) ترجم كتاب المعطيات لديوفنطس 0,5

التمرين الثاني: (٦,٥ نقطة)

I  ١٢١١٩ (١ن)

 $\frac{1}{16}$ (١ن)  $\frac{1}{8}$ (١ن)  $\frac{2}{3}$ (١ن)

II (١ن)  49

ملاحظة: $270 = 4\times60+30$

إذن: (١ن)  270

III (0,5) $\iota = 10$ ، $\beta = 2$ (0,5)

(0,5) $\varphi = 500$

التمرين الثالث: (٥,٥ نقطة)

- مساحة كل مثلث من المثلثات AHG، GBD، HDE، FKC هي

$\frac{3\times3}{2} = 4,5$ (١ نقطة)

- مساحة المربع تساوي $9\times9 = 81$ وحدة مساحة (و م) (0,5 نقطة)

- مساحة المثمن = مساحة المربع - مساحة المثلثات

$= 81 - (4\times4,5) = 63$ و م (١ نقطة)

مساحة القرص عند الأقدمين تساوي مساحة مربع طول ضلعه

٨ أي مساحة الدائرة M وقطرها R تقريبا هي (١ نقطة)

مربع طول ضلعه $\frac{٨}{٩}R$ وبالتالي

M (المساحة الدائرة) $= \left(\frac{٨}{٩} \times ٢\,نق\right)^{٢}$ // (حيث نصف القطر $\frac{R}{٢} =$ نق)

$= \left(\frac{١٦}{٩}\right)^{٢} نق^{٢} = \pi\, نق^{٢}$ (١ نقطة)

بالمطابقة نجد

$\pi = \frac{٢٥٦}{٨١} \simeq 3,16049$

جامعة الشهيد حمه لخضر - الوادي

كلية العلوم الدقيقة

قسم الرياضيات — السنة الجامعية: 2016 – 2017

سنة ثانية رياضيات (السداسي الثالث) — المدة الزمنية : ساعة ونصف

امتحان السداسي في مقياس التحليل العددي 01

التمرين الأول: (7 نقاط)

نريد استطاب الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ عند النقط a^2 ، $4a^2$ ، $9a^2$ حيث $a>0$ بكثير حدود P_2^a بطريقة نيوتن.

1. أرسم جدول الفروق المقسومة.
2. بين أن: $P_2^a(x)=\frac{-1}{60a^3}x^2+\frac{5}{12a}x+\frac{9a}{15}$.

خذ في كل ما يلي $a=1$.

3. عين قيمة تقريبية للمقدار $f(2)$.
4. عين القيمة الحقيقية للمقدار $f^{-1}(1{,}5375)$ ثم جد قيمة تقريبية له.

التمرين الثاني: (6 نقاط)

لنعتبر التكامل $I=\int_1^2 xf(x)dx$ حيث f دالة عددية معرفة بالجدول التالي:

x_i	1	1,25	1,5	1,75	2
$f(x_i)$	2,718	3,490	4,481	5,754	7,389

1. عين قيمة تقريبية للمقدار I باستعمال طريقة سمبسون.
2. اذا علمت أن $f(x)=e^x$ ، أوجد القيمة الحقيقية للمقدار I ثم جد تقريبا للمقدار e.
3. عبر عن الخطأ المرتكب في حساب I في الجواب 1 بدلالة كل من الخطوة h، عدد التقسيمات n و $[xf(x)]^{(4)}$ ثم قدر قيمته.

التمرين الثالث: (7 نقاط)

نريد ايجاد حلا تقريبيا للمعادلة (*) ... $-x^3+4x+1=0$ على المجال $[-1{,}0]$.

1. أثبت أن المعادلة (*) تقبل حلا وحيدا على المجال $[-1{,}0]$.
2. تحقق أن (*) تكافئ $x=g(x)=\frac{x^3-1}{4}$ ثم بين أن خوارزم النقطة الثابتة $\begin{cases} x_0=-1 \\ x_{n+1}=\frac{x_n^3-1}{4} \end{cases}$ تتقارب نحو الحل الوحيد للمعادلة (*).
3. عبر عن الخطأ في حال تقريب الحل الى الحد العاشر بدلالة كل من ثابت التقلص L ، عدد التكرارات n، x_1 و x_0 ثم قدر قيمته.
4. جد تقريبا لحل المعادلة (*) بأربع أرقام ثابتة بعد الفاصلة.

4) تعيين القيمة الحقيقية لـ $f^{-1}(1,5375)$

بما أن f تقابل من $[1,9]$ إلى $[1,3]$ إذن:

$\forall y \in [1,3], \exists ! x \in [1,9] / f(x)=y \iff x=f^{-1}(y)$ 0,25

إذن: من أجل $y=1,5375$ يوجد x وحيد من $[1,9]$

حيث: $\sqrt{x}=1,5375$ ومنه $x=(1,5375)^2$ 0,25

$x=2,36390625$ 0,25

إيجاد قيمة تقريبية لـ $f^{-1}(1,5375)$

نعين x المنتمي لـ $[1,9]$ بحيث: $P_2^1(x)=1,5375$

لأن $f(x) \simeq P_2^1(x)$ ومنه

$P_2^1(x)=1,5375 \iff -\frac{1}{60}x^2+\frac{5}{12}x+\frac{9}{15}=1,5375$ 0,25

$\iff x^2-25x+56,25=0$

مميز المعادلة الأخيرة: $\Delta=(25)^2-4(56,25)$

0,25 $=625-225$

$=400>0$

إذن $x=\frac{25-20}{2}=2,5 \in [1,9]$ مقبول

V

$x=\frac{25+20}{2}=22,5 \notin [1,9]$ مرفوض

ومنه 0,25 $x \simeq 2,5$

التمرين الثاني: (06 نقاط)

1) تعيين قيمة تقريبية لـ I:

التصحيح النموذجي لامتحان السداسي لمقياس التحليل العددي 1.

2017 / 2016 : موسم

التمرين الأول : (07 نقاط)

1) جدول الفروق المقسومة :

x_i	y_i	$\delta(x_i, x_{i+1})$	$\delta(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$
a^2	a		
		$\frac{1}{3a}$	
$4a^2$	$2a$		$-\frac{1}{60a^3}$
		$\frac{1}{5a}$	
$9a^2$	$3a$		

1,5

2) تبيان أن : $P_2^a(x) = -\frac{1}{60a^3}x^2 + \frac{5}{12a}x + \frac{9a}{15}$

لدينا : $P_2^a(x) = y_0 + (x-x_0)\delta(x_0,x_1) + (x-x_0)(x-x_1)\delta(x_0,x_1,x_2)$ 0,5

$= a + (x-a^2)\frac{1}{3a} + (x-a^2)(x-4a^2)\left(-\frac{1}{60a^3}\right)$

$= a + \frac{1}{3a}x - \frac{a}{3} - \frac{1}{60a^3}x^2 + \frac{1}{12a}x - \frac{a}{15}$ 0,5

ومنه $P_2^a(x) = -\frac{1}{60a^3}x^2 + \frac{5}{12a}x + \frac{9a}{15}$ 0,5

3) تعيين قيمة تقريبية للمقدار $f(2)$

لدينا $f(2) \simeq P_2^1(2) = -\frac{1}{60}\cdot 2^2 + \frac{5}{12}\cdot 2 + \frac{9}{15}$ 0,5

ومنه $f(2) \simeq 1,3666$ 0,5

4) تعيين القيمة الحقيقية لـ $f^{-1}(1,5375)$

بما أن f تقابل من $[1,9]$ إلى $[1,3]$ اذن:

$\forall y \in [1,3], \ \exists! \, x \in [1,9] \ / \ f(x)=y \iff x = f^{-1}(y)$ 0,5

اذن: من أجل $y = 1,5375$ يوجد x وحيد من $[1,9]$

حيث: $\sqrt{x} = 1,5375$ معناه $x = (1,5375)^2$ 0,5

$x = 2,36390625$ 0,5

أما قيمة تقريبية لـ $f^{-1}(1,5375)$

نعين x المنتمية لـ $[1,9]$ بحيث: $P_2^1(x) = 1,5375$

لأن $f(x) \simeq P_2^1(x)$ ومنه

$$P_2^1(x) = 1,5375 \iff -\frac{1}{60}x^2 + \frac{5}{12}x + \frac{9}{15} = 1,5375$$ 0,5

$$\iff x^2 - 25x + 56,25 = 0$$

مميز المعادلة الأخيرة: $\Delta = (25)^2 - 4(56,25)$

0,5 $= 625 - 225$

$= 400 > 0$

اذن مقبول $x = \frac{25-20}{2} = 2,5 \in [1,9]$ ✓

مرفوض $x = \frac{25+20}{2} = 22,5 \notin [1,9]$

ومنه 0,5 $x \simeq 2,5$

التمرين الثاني: (06 نقاط)

1) تعيين قيمة تقريبية لـ I :

$$I \simeq \frac{h}{3}\left[x_0 f(x_0) + x_4 f(x_4) + 4\left(x_1 f(x_1) + x_3 f(x_3)\right) + 2\left(x_2 f(x_2)\right)\right]$$ 0,5

$$= \frac{0,25}{3}\left[1 f(1) + 2 f(2) + 4\left(1,25 f(1,25) + 1,75 f(1,75)\right) + 2\left(1,5 f(1,5)\right)\right]$$

$$= \frac{0,25}{3}\left[2,718 + 2 \times 7,389 + 4\left(1,25 \times 3,49 + 1,75 \times 5,754\right) + 2\left(1,5 \times 4,481\right)\right]$$ 0,5

$$I \simeq 7,3889166667$$ 0,5

2) إيجاد القيمة الحقيقية لـ I

لدينا

$$I = \int_1^2 \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^x}_{v'}\,dx \overset{\text{بالتجزئة}}{=} \left[x e^x\right]_1^2 - \int_1^2 e^x\,dx$$ 0,5

$$= 2e^2 - e - \left[e^x\right]_1^2$$

$$= 2e^2 - \cancel{e} - e^2 + \cancel{e}$$

$$I = e^2$$ 0,5

ومنه نستنتج أن $e^2 \simeq 7,3889166667$

أي $e \simeq \sqrt{7,3889166667}$ 0,5

$$e \simeq 2,7182561812$$

3) التعبير عن الخطأ

$$\varepsilon \simeq \frac{n h^5}{180} \cdot \max_{x \in [1,2]} \left|\left[x f(x)\right]^{(4)}\right|$$ 0,5

$$= \frac{4(0,25)^5}{180} \max_{x \in [1,2]} \left|\left[x e^x\right]^{(4)}\right|$$

البحث عن $\underset{x\in[1,2]}{Max}\left|\left(xe^{x}\right)^{(4)}\right|$

لدينا، من أجل كل $x\in[1,2]$

$$(xe^{x})' = (1+x)e^{x}$$
$$(xe^{x})'' = (2+x)e^{x}$$
0,1

$$(xe^{x})''' = (3+x)e^{x}$$
$$(xe^{x})^{(4)} = (4+x)e^{x}$$
0,1

$$(xe^{x})^{(5)} = (5+x)e^{x} > 0$$

0,1

ومنه $(xe^{x})^{(4)}$ متزايدة تماما على $[1,2]$

إذا
$$\underset{x\in[1,2]}{Max}\left|(xe^{x})^{(4)}\right| = (xe^{x})^{(4)}_{(x=2)} = \left[(4+x)e^{x}\right]_{(x=2)} = 6e^{2}$$
0,1

$$E \simeq 0,0000310\,2083 \times 6e^{2}$$

ومنه
$$E \simeq 0,0000962164$$
0,1

التمرين الثالث (07 نقاط)

① إثبات أن (*) تقبل حلا وحيدا

لدينا (*) تكافئ: $f(x)=0$ حيث $f(x) = -x^{3}+4x+1$

ولدينا f مستمرة ومتزايدة تماما على $[-1,0]$ لأن

0,1 0,1

الأكثر من ذلك: $\forall x\in[-1,0[:\ f'(x) = -3x^{2}+4 > 0$

و $f(-1) = -2 < 0$ و $f(0) = 1 > 0$ 0,1

ومنه حسب م.ق.م المعادلة $f(x)=0 \Leftrightarrow$ (*)

تقبل حل وحيد في $[-1,0]$ 0,1

② التحقق أن (*) تكافئ: $x = g(x) = \frac{x^{3}-1}{4}$

لدينا: ✪ تكافئ: $-x^3+4x+1=0$

وبالتالي: $x^3-1=4x$

وعليه $x=\frac{x^3-1}{4}=g(x)$

تبيان أن الخوارزم متقاربة

دراسة استقرار g

لدينا $\forall x\in[-1,0[\ : g'(x)=\frac{3x^2}{4}>0$

إذن g متزايدة تماما

ومنه: $\forall x\in[-1,0] : g(x)\in[g(-1),g(0)]$

$=[-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}]\subset[-1,0]$

ومنه g مستقر على $[-1,0]$

دراسة تقلص g

لدينا: $\forall x\in[-1,0[: |g'(x)|'=\frac{3}{2}x<0$

إذن $g'(x)=|g'(x)|$ متناقصة تماما على $[-1,0]$

ومن جهة أخرى $\max_{x\in[-1,0]}|g'(x)|=g'(-1)=\frac{3}{4}<1$

ومنه g تقلص على $[-1,0]$

إذن الخوارزم متقاربة وهذا حسب نظرية التقارب

③ التعبير عن الخطأ

$E\simeq\frac{L^n}{1-L}|x_1-x_0|$; $L=0,75,\ n=9$

$\simeq\frac{(0,75)^9}{1-0,75}|-0,41|\simeq 0,1501693724$

④ ايجاد تقريب للحل بـ ٤ أرقام أربعة ثابتة بعد الفاصلة

$x_0 = -1$

$x_1 = -0,5$

$x_2 = -0,28125$ 0,5

$x_3 = -0,2555618286$

$x_4 = -0,2541728038$ 0,5

$x_5 = -0,2541051332$

$x_6 = -0,2541018552$ 0,5

$\alpha \simeq x_6 = -0,2541018552$

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الشهيد حمه لخضر - الوادي

كلية: .... (18) ....
الإسم واللقب: ....
مقياس: .... الرقم: .... الدفعة: .... الفوج: ....
التاريخ: ....
رقم التسجيل: ....
الرقم السري: ....
يمنع على الطالب وضع أي إشارة على ورقة الامتحان

الرقم السري
....
العلامة
20/ ....

EX1) 4p $\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

1) $\varphi_a(P+Q) = (P+Q)(a) + a\int_{-1}^{1}(P+Q)(t)\,dt$

$= P(a) + Q(a) + a\int_{-1}^{1}P(t)\,dt + a\int_{-1}^{1}Q(t)\,dt$

$= \varphi_a(P) + \varphi_a(Q)$ 1p

2) $\varphi_a(\alpha P) = (\alpha P)(a) + a\int_{-1}^{1}(\alpha P)(t)\,dt$

$= \alpha\left(P(a) + a\int_{-1}^{1}P(t)\,dt\right)$

$= \alpha\varphi_a(P)$.

$\overset{1}{\circ}$ ① et ② $\varphi_a \in E^*$. 1p

EX2) 2p 1) $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_2 + 2x_3^2$

$q(x) = (x_1^2 - 2x_1x_2) + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$

$q(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2^2 + 2x_2x_3) + 2x^3$

$= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^3$.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الشهيد حمه لخضر - الوادي

كلية: .... تخصص: .... (18)
الإسم واللقب: ....
مقياس: .... الرقم: .... الدفعة: .... الفوج: ....
التاريخ: ....
رقم التسجيل: ....
الرقم السري: ....
يمنع على الطالب وضع أي إشارة على ورقة الإمتحان

الرقم السري
....
العلامة
20/ ....

Ex 1) (2p) $\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

1) $\varphi_a(P+Q) = (P+Q)(a) + a\int_{-1}^{1}(P+Q)(t)\,dt$

$= P(a) + Q(a) + a\int_{-1}^{1}P(t)\,dt + a\int_{-1}^{1}Q(t)\,dt$

$= \varphi_a(P) + \varphi_a(Q)$ (1p)

2) $\varphi_a(\lambda P) = (\lambda P(a) + a\int_{-1}^{1}(\lambda P)(t)\,dt$

$= \lambda\left(P(a) + a\int_{-1}^{1}P(t)\,dt\right)$

$= \lambda\varphi_a(P)$.

D'o ① et ② $\varphi_a \in E^*$. (1p)

Ex 2) (2p) 1) $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_2 + 2x_3^2$

$q(x) = (x_1^2 - 2x_1x_2) + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$

$q(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2^2 + 2x_2x_3) + 2x^3$

$= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^3$.

~~EX3) $H \neq$ ...~~

~~$\ast$ Si $H = \{0\} \Rightarrow H^{\perp} = E^{*}$~~

~~$\ast$ Si $H = \{0\}$ pour tout forme φ on a $\varphi(0) = 0$, $H^{\perp} = \{0\}^{\perp} = E$~~

~~1) Si $H = \{0\}$ pour tout forme φ on a $\{\varphi(x) = 0\} = E^{*}$ 1~~

~~$\ast$ $\{0\}^{\perp} = \{\varphi \in E^{*}, \forall x \in \{0\} \ \varphi(x) = 0\} = E^{*}$~~

~~2) Supposons que $H^{\perp} = E^{*}$, alors $E = H \oplus F$ avec $F \neq E$. Il $\varphi \in E$~~

~~1) Si $H^{\perp} = E^{*}$ avec $H \neq \{0\}$ on a~~

~~par définition $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \in H \\ 0 & \text{si } x \in F \end{cases} \Rightarrow \varphi \notin H^{\perp}$ ce qui contredit~~

~~$H^{\perp} = E^{*}$ on a donc $H = \{0\}$. 1~~

EX N° 2 partie 2

2) $q(x) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_3 = 0 \wedge x_2 = 0 \wedge x_1 = 0$$

1p

donc $q(x)$ bien défini positif.

alors $q(x)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$

5p) Ex 4)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La forme quadratique associée à A.

$$q(x) = {}^{t}X A X \quad / \ \forall x \in \mathbb{R}^3, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$q(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{t} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3 .$$

1p

$\varphi_q(x,y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y) \right]$ telle que

$x = (x_1, x_2, x_3) \quad y = (y_1, y_2, y_3)$. ou bien

$\varphi_q(x,y) = {}^tXAY$. on prendre $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

$$\varphi_q(X,Y) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_q(X,Y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 - x_2y_1 + 3x_3y_1 - x_1y_2$$
$$+ 3x_3y_2 + 3x_1y_3 + 2x_2y_3 . \quad (2p)$$

EX 5) (5p) $\quad q(x) = \sum_{1}^{n} x_i^2 - 2 \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & 1 & -1 & & \vdots \\ -1 & -1 & 1 & -1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1p)$$

si $n = 3$, on a :

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

$$q(x) = (x_1 - x_2 - x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3$$

$$q(x) = (x_1 - x_2 - x_3)^2 - 4x_2x_3 = (x_1 - x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2,$$

(2p)

rang φ_q ou bien rang q.

$l_1 = (1, -1, -1)$

$l_2 = (0, 1, -1)$ $\qquad \det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

$l_3 = (0, 1, 1)$

donc $\{l_1, l_2, l_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ rang $q = 3$. (1p)

la signature de $q = (2, 1)$. (1p)

Ex 5) l'orthonormalisation de la base (6p)

$B = \{v_1 = t^2, v_2 = t, v_3 = 1\}$ dans l'espace $\mathbb{R}_2[t]$

par le produit scalaire $\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt = \langle P, Q \rangle$.

$e_1 = t^2 \longrightarrow \hat{e}_1 = t^2 \longrightarrow e'_1 = \frac{\hat{e}_1}{\|\hat{e}_1\|} = \frac{\sqrt{10}}{2} t^2$ (2)

$e_2 = t \longrightarrow \hat{e}_2 = e_2 + \lambda e'_1$

$\lambda = -\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{10}}{2} t^2 t\,dt = 0$ $\qquad \hat{e}_2 = t \longrightarrow e'_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\, t = \frac{\sqrt{6}}{2} t$

$\|\hat{e}_2\| = \left(\int_{-1}^{1} t^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$ (2p)

$e_3 = 1 \longrightarrow \hat{e}_3 = e_3 + \lambda e'_1 + \mu e'_2 = 1 - \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} t = 1 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} t$ (2p)

$\lambda = -\langle e_3, e'_1 \rangle = -\frac{\sqrt{10}}{3}$, $\mu = -\langle e_3, e'_2 \rangle = 0$

[illegible]