سنة أولى - ماستر

رياضيات

الامتحان مع التصحيح النموذجي

الدورة العادية

Universite Echahid Hamma LaKhdar-Eloued. Année universitaire 2016/2017.

Département de Maths. 1ère année Master.

Examen d'Analyse Numérique (Durée :1h 30mn)

Exercice 1(7pts)

Soit le problème (P) pour une fonction $u(x,y)$ définie sur $[0,8]\times[0,4]$:

$$\begin{cases} \triangle u = 0 \quad (x,y)\in]0,8[\times]0,4[\\ u(0,y) = u(x,0) = 0 \\ u(8,y) = u(x,4) = 10 \end{cases}$$

1. Exprimer le problème discrét (P_h) associé à (P), en utilisant le schéma aux différences finies centrées.
   On supposera que le maillage est uniforme et de pas $\triangle x = \triangle y = 2$.

2. Mettre (P_h) sous forme matricielle : $AU_h = b$, determiner la matrice A et les vecteurs : U_h et b
3. Montrer que le problème (P_h), admet une solution unique.

4. Si nous appliquons le schéma aux différences finies décentrées, quelle est la difficulté que nous rencontrons?

Exercice 2(10pts)

Soit le problème (P)suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (x,t)\in]0,1[\times]0,T[\quad a>0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad t\in]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) \quad x\in[0,1] \end{cases}$$

On suppose que (P) admet une solution unique $u \in C^{2,4}([0,T],[0,1])$.

Pour approcher la solution u de (P),on considère le schéma aux différences finies suivant :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \\ \\ u_i^0 = u_0(x_i) \quad i = 0,\dots,M \\ \\ u_0^n = u_M^n = 0 \quad n = 1,\dots,N \end{cases}$$

1. Montrer que l'erreure de consistance du schéma est d'ordre 1 en temps et en espace.

2. Etudier la stabilité en norme L^∞.

3. Ce schéma est à un pas ou à deux pas en temps? justifier votre reponse.

4. Notons que $e^n(u)$ le vecteur de l'erreur au temps t^n, avec : $e_i^n(u) = u_i^n - u(t^n, x_i)$
   Montrer que :
   $$\|e^n(u)\|_\infty \le C_1(\triangle t + \triangle x)$$
5. Exprimer le problème (P_h) sous forme matricielle, ce schéma est-il explicite ou implicite? justifier votre reponse.
   Déduir la matrice d'itération.

Question du cours(3pts)

Quels sont les avantages et les inconvénients de la méthode des différences finies.

M. Beggas

Corrigé (Analyse Numérique
1ère Master
BEGGAS Mohammed

EXERCICE I : (7pts)

$$(P)\begin{cases} \Delta u = 0 & (x,y)\in\,]0,8[\times]0,4[\\ u(0,y) = u(x,0) = 0 \\ u(8,y) = u(x,4) = 10 \end{cases}$$

1°/ Les nœuds :

on a : $n_x = \dfrac{8-0}{\Delta x} = \dfrac{8}{2} = 4$

donc : $i = 0, 1, 2, 3, 4$

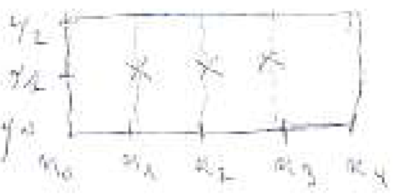
les nœuds interieurs $i = 1, 2, 3$.

$n_y = \dfrac{4-0}{\Delta y} = \dfrac{4}{2} = 2$

donc : $j = 0, 1, 2$

nœud interieur : $j = 1$.

différences finies centrées :



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{4}$$

$$(P_h)\begin{cases} -4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} = 0 \\ u_{0,j} = 0 \quad j = 0, 1, 2 \\ u_{i,0} = 0 \quad i = 0, 1, 2, 3, 4 \qquad \text{c. aux limites} \\ u_{4,j} = 10 \quad j = 0, 1, 2 \\ u_{i,2} = 10 \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

2) on a : $(n_x - 1) \times (n_y - 1) = (4-1)(2-1) = 3$
donc on obtient un système de Trois éqs.

$j = 1$:

$i = 1$: $-4u_{1,1} + u_{2,1} + u_{0,1} + u_{1,2} + u_{1,0} = 0$

$i = 2$: $-4u_{2,1} + u_{3,1} + u_{1,1} + u_{2,2} + u_{2,0} = 0$

$i = 3$: $-4u_{3,1} + u_{4,1} + u_{2,1} + u_{3,2} + u_{3,0} = 0$

En tenant compte aux conditions aux limites, on obtient :

$$\begin{cases} -4u_{1,1} + u_{2,1} = -10 \\ u_{1,1} - 4u_{2,1} + u_{3,1} = -10 \\ u_{2,1} - 4u_{3,1} = -20 \end{cases}$$

La forme matricielle est : $AU_h = b$.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} ; \quad U_h = \begin{pmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ -20 \end{pmatrix}$$

3) (P_h) admet une solution unique si :
$\det A \neq 0$ ou A sy. déf. positive.
Donc : (P_h) admet une sol. unique.

4) la difficulté est au niveau du frontière
$u_{i+2,j}$ $u_{i-2,j}$ n'appartient pas au domaine
même chose

Ex 2 : (14 pts).

1°/ D'après le développement de Taylor on a :

- $$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta t)$$

- $$\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x)$$

- $$\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^2)$$

On remplace les valeurs dans notre problème

on obtient : $\|R_i^n\| \leq C(\Delta t + \Delta x)$.

où : $C = \max\left(\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\| ; \frac{a}{2}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|\right)$.

4/ $\|e^{n+1}\|_\infty \leq \|e^n\| + |R_i^n| \Delta t$.

Donc : $\|e^n\|_\infty \leq \|e^0\| + n \Delta t\, C(\Delta t + \Delta x)$ $(e^0 = 0)$

$\|e^n\|_\infty \leq CT(\Delta t + \Delta x)$

2°/ Stabilité en norme L^∞.

D'après le schéma on a :

$$U_i^{n+1} = -\frac{a\Delta t}{\Delta x} U_i^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x} U_{i-1}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} U_{i+1}^n - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} U_{i-1}^n + u_i^n$$

$$U_i^{n+1} = \left(1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x} - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2}\right) U_i^n + \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) U_{i-1}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} U_{i+1}^n$$

pour avoir la stabilité une condition nécessaire et suffisante : u_i^{n+1} est une combinaison convexe de u_i^n, u_{i-1}^n et u_{i+1}^n

on a :

$$1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x} - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{a\Delta t}{\Delta x} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 1$$

il nous reste la condition de positivité des Trois Termes :

$$\frac{a\Delta t}{\Delta x^2} > 0 \quad ; \quad \frac{a\Delta t}{\Delta x} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} > 0 \qquad a>0,\ \Delta t>0 \text{ et } \Delta x>0$$

$$1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x} - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0 \quad \text{si} \quad \frac{a\Delta t}{\Delta x} + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1$$

c.a.d : $$\frac{\Delta t(a\Delta x + 2)}{\Delta x^2} \leq 1 \quad ; \quad \boxed{\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{a\Delta x + 2}}$$

$$\|U^n\|_\infty \leq \|U_0\|_\infty$$

3/ Ce schéma est à un pas car : pour calculer $U^{n+1}(t^{n+1})$ il suffit de connaitre $U^n(t^n)$.

en temps $t^{n+1} \longrightarrow$ en temps t^n

4) on a :

$$U^{n+1} = \left(B - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} A\right) U^n$$

Ce Schéma est explicite, car on peut calculer U^{n+1} sans inverser la matrice.

matrice d'iteration :

$$C = \left(B - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} A\right)$$

où :

A matrice tridiagonale :

$$A = \text{trid}\left(\cancel{a}-r+1 \;;\; +r+2 \;;\; 1 \right)$$

$$\cancel{A} \qquad A = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} \cancel{+r}+2 & -1 & & 0 \\ \cancel{-r}+1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & \cancel{-r}+1 & +r+2 \end{pmatrix} \qquad r = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$$

Question de Cours : (3 pts)

* les avantages :

1°/ grande simplicité d'écriture et faible coût de calcule.

* les inconvénients :

1°/ limitation de la géométrie de domaines de calculs (simples).

2°/ Difficultés de prise en compte de conditions aux limites.

$$B = \begin{pmatrix} \frac{a\Delta t}{\Delta x} - 1 & & & 0 \\ -\frac{a\Delta t}{\Delta x} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\frac{a\Delta t}{\Delta x} & \frac{a\Delta t}{\Delta x} - 1 \end{pmatrix}$$

جامعة الوادي
قسم الرياضيات

السنة الجامعية 2016\2017
9 جانفي 2017

إمتحان الدورة العادية في مقرّر التوزيعات

السنة : أولى ماستر

المدّة : 1 سا و 30 د

[7] **التمرين الأول:** نعتبر $< T, \varphi >= \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$.

1. تأكّد أنّ T يعرّف تطبيق من $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ في $\mathbb{C}$.
2. أثبت أنّ T توزيع على $\mathbb{R}_+^*$ وأحسب مشتقه.

[7] **التمرين الثاني:**

1. أحسب $\left(\frac{\delta'}{1+x^2}\right)'$ حيث δ يشير لتوزيع ديراك على $\mathbb{R}$ عند النقطة 0.
2. نعتبر H تابع هيفسايد و $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ عيّن شرطا على φ بحيث $H\varphi \in H^1(\mathbb{R})$.
3. نعتبر $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = e^{iax}$ حيث $a \in \mathbb{R}$، $i \in \mathbb{C}$ و $i^2 = -1$.
تأكّد من أنّ $f \in S'(\mathbb{R})$ (توزيع معتدل) ثم أحسب تحويل فوريي له.

[6] **التمرين الثالث:** ليكن $a \in \mathbb{C}$ و $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

1. تأكّد من أنّ $T' - aT = e^{ax}(e^{-ax}T)'$.
2. إستنتج الحل العام في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ للمعادلة التفاضلية $T' - aT = 0$.
3. ما هو الحل العام في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ للمعادلة التفاضلية $T'' + aT' = 0$ حيث $a \in \mathbb{C}^*$.

بالتوفيق.

ورقة إضافية ./.

تصحيح امتحان الدورة العادية في مقرر التوزيعات

أولى ماستر رياضيات 2017/2016

التمرين الأول:

1. ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ ومنه نوجد $0<\alpha<\beta$ حيث $\operatorname{supp}\varphi \subset [\alpha,\beta]$ 2ن

إذن $\langle T,\varphi\rangle = \int_\alpha^\beta \frac{\varphi(x)}{x}dx < +\infty$

2. أ) T خطي واضح 2ن

ب) T مستمر: ليكن $K \subset \mathbb{R}_+^*$ متراص و $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}_+^*)$ إذن

نوجد $0<\alpha<\beta$ حيث $K\subset[\alpha,\beta]$. لدينا

$$|\langle T,\varphi\rangle| = \left|\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(x)}{x}dx\right| \le \left(\int_\alpha^\beta \frac{1}{x}dx\right)\sup_{x\in K}|\varphi(x)| = C\, p_{K,0}(\varphi)$$

من أ و ب ينتج أنه توزيع على $\mathbb{R}_+^*$.

• حساب T': ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ لدينا مستعملين التكامل بالتجزئة 2ن

$$\langle T',\varphi\rangle = -\int_0^{+\infty}\frac{\varphi'(x)}{x}dx = -\int_\alpha^\beta \frac{\varphi'(x)}{x}dx = -\int_\alpha^\beta\frac{\varphi(x)}{x^2}dx = -\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx$$

$$= \langle -\tfrac{1}{x^2},\varphi\rangle$$

ومنه $T' = -\frac{1}{x^2}$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$.

التمرين الثاني:

1. ليكن $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. لدينا 2ن

$$\left\langle \left(\frac{\delta'}{1+x^2}\right)',\varphi\right\rangle = -\left\langle \frac{\delta'}{1+x^2},\varphi'\right\rangle = -\left\langle \delta',\frac{\varphi'}{1+x^2}\right\rangle$$

$$= \left\langle \delta,\frac{\varphi''(x)(1+x^2)-2x\varphi'(x)}{(1+x^2)^2}\right\rangle = \varphi''(0) = \langle \delta'',\varphi\rangle$$

أي $\left(\frac{\delta'}{1+x^2}\right)' = \delta''$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. من جهة لدينا $\int_{\mathbb{R}} (H\varphi(x))^2 dx = \int_0^{+\infty}(\varphi(x))^2dx<+\infty$ إذن $H\varphi\in L^2(\mathbb{R})$ 2ن

ومن جهة أخرى لدينا من أجل كل $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle (H\varphi)',\psi\rangle = -\langle H\varphi,\psi'\rangle = -\int_0^{+\infty}\varphi(x)\psi'(x)dx$$

$$= \varphi(0)\psi(0) + \int_0^{+\infty}\varphi'(x)\psi(x)dx$$

$$= \langle \varphi(0)\delta,\psi\rangle + \langle H\varphi',\psi\rangle$$

أي $(H\varphi)' = \varphi(0)\delta + H\varphi'$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

لو نفرض $\varphi(0)=0$ يكون $(H\varphi)'=H\varphi'\in L^2(\mathbb{R})$

وعليه $H\varphi\in H^1(\mathbb{R})$.

ورقة إضافية . 1 .

3. لدينا $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ من جهة أخرى

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : |\langle f, \varphi \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}} e^{iax} \varphi(x)\,dx \right| \le \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})} \le C\, N_0(\varphi)$

حيث C ثابت موجب لا يتعلق بـ φ ومنه $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (توزيع معتدل)

• حساب Ff : ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ لدينا

$$\langle Ff, \varphi \rangle = \langle f, F\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{iax} F\varphi(x)\,dx = \bar{F}F\varphi(a)$$
$$= (2\pi)^n \varphi(a)$$
$$= (2\pi)^n \langle \delta_a, \varphi \rangle$$

أي $Ff = (2\pi)^n \delta_a$

التمرين الثالث:

1. لدينا $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle e^{ax}(e^{-ax}T)', \varphi \rangle = \langle (e^{-ax}T)', e^{ax}\varphi \rangle$

$$= -\langle e^{-ax}T, a e^{ax}\varphi + e^{ax}\varphi' \rangle$$
$$= -\langle T, a\varphi + \varphi' \rangle = -a\langle T, \varphi \rangle + \langle T', \varphi \rangle$$
$$= \langle -aT + T', \varphi \rangle$$

أي $e^{ax}(e^{-ax}T)' = -aT + T'$

2. من السؤال الأول لدينا $T' - aT = 0$ يكافئ $e^{ax}(e^{-ax}T)' = 0$

$e^{ax}(e^{-ax}T)' = 0 \iff \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle e^{ax}(e^{-ax}T)', \psi \rangle = 0$

$\iff \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle (e^{-ax}T)', e^{ax}\psi \rangle = 0$

$\iff \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle (e^{-ax}T)', \varphi \rangle = 0$

(يكفي أن نضع $\psi = \frac{\varphi}{e^{ax}}$ لأن $\forall x \in \mathbb{R} : e^{ax} \neq 0$)

$\iff (e^{-ax}T)' = 0$

$\iff e^{-ax}T = c \in \mathbb{R}$ ثابت

$\iff T = c\, e^{ax}, \ c \in \mathbb{R}$

3. لدينا $T'' + aT' = 0 \iff (T')' - (-a)T' = 0$

$\iff e^{-ax}(e^{ax}T')' = 0$ (حسب السؤال 1)

$\iff T' = c\, e^{-ax}, \ c \in \mathbb{R}$ (حسب السؤال 2)

$\iff T' - c\, e^{-ax} = 0$

$\iff \left(T + \frac{c}{a} e^{-ax}\right)' = 0$ ($a \neq 0$ لأن)

$\iff T + \frac{c}{a} e^{-ax} = k, \ k \in \mathbb{R}$

$\iff T = k + \frac{c}{a} e^{-ax}, \ (c, k) \in \mathbb{R}^2$

كل الحسابات في السؤال الثاني والثالث بمفهوم التوزيعات .

2ن
1.5ن
2ن
2.5ن

تصحيح امتحان الدورة العادية في مقرر التوزيعات

أولى ماستر رياضيات $2017/2016$

التمرين الأول:

1. ليكن $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ ومنه يوجد $0<\alpha<\beta$ حيث $\operatorname{supp}\varphi\subset[\alpha,\beta]$ (2ن)

إذن $\langle T,\varphi\rangle=\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(x)}{x}dx<+\infty$

2. أ) T خطي واضح (2ن)

ب) T مستمر: ليكن $K\subset\mathbb{R}_+^*$ متراص و $\varphi\in\mathcal{D}_K(\mathbb{R}_+^*)$ إذن يوجد $0<\alpha<\beta$ حيث $K\subset[\alpha,\beta]$ لدينا

$$|\langle T,\varphi\rangle|=\left|\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(x)}{x}dx\right|\le\left(\int_\alpha^\beta\frac{1}{x}dx\right)\sup_{x\in K}|\varphi(x)|=C\,p_{K,0}(\varphi)$$

من أ) و ب) ينتج أن T توزيع على $\mathbb{R}_+^*$.

• حساب T': لدينا من أجل $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ باستعمال التكامل بالتجزئة (2ن)

$$\langle T',\varphi\rangle=-\int_0^{+\infty}\frac{\varphi'(x)}{x}dx=-\int_\alpha^\beta\frac{\varphi'(x)}{x}dx=-\int_\alpha^\beta\frac{\varphi(x)}{x^2}dx=-\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx$$

$$=\langle -\frac{1}{x^2},\varphi\rangle$$

ومنه $T'=-\frac{1}{x^2}$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$.

التمرين الثاني:

1. ليكن $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. لدينا (2ن)

$$\langle\left(\frac{\delta'}{1+x^2}\right)',\varphi\rangle=-\langle\frac{\delta'}{1+x^2},\varphi'\rangle=-\langle\delta',\frac{\varphi'}{1+x^2}\rangle$$

$$=\langle\delta,\frac{\varphi''(x)(1+x^2)-2x\varphi'(x)}{(1+x^2)^2}\rangle=\varphi''(0)=\langle\delta'',\varphi\rangle$$

أي $\left(\frac{\delta'}{1+x^2}\right)'=\delta''$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. من جهة لدينا $\int_{\mathbb{R}}(H\varphi(x))^2dx=\int_0^{+\infty}(\varphi(x))^2dx<+\infty$ إذن $H\varphi\in L^2(\mathbb{R})$ (2ن)

ومن جهة أخرى لدينا من أجل كل $\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle(H\varphi)',\psi\rangle=-\langle H\varphi,\psi'\rangle=-\int_0^{+\infty}\varphi(x)\psi'(x)dx$$

$$=\varphi(0)\psi(0)+\int_0^{+\infty}\varphi'(x)\psi(x)dx$$

$$=\langle\varphi(0)\delta,\psi\rangle+\langle H\varphi',\psi\rangle$$

أي $(H\varphi)'=\varphi(0)\delta+H\varphi'$ في $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

لو نفرض $\varphi(0)=0$ تكون $(H\varphi)'=H\varphi'\in L^2(\mathbb{R})$

ومنه $H\varphi\in H^1(\mathbb{R})$.

3. لدينا $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ من جهة أخرى 2ن

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : |\langle f, \varphi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}} e^{-ax}\varphi(x)dx\right| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C\, N_0(\varphi)$

بما أن C ثابت موجب لا يتعلق بـ φ فإن $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (توزيع معتدل)

• حساب Ff : ليكن $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ لدينا

$$\langle Ff, \varphi\rangle = \langle f, F\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax} F\varphi(x)dx = FF\varphi(a) = (2\pi)^n \varphi(a) = (2\pi)^n \langle \delta_a, \varphi\rangle$$

أي $Ff = (2\pi)^n \delta_a$

التمرين الثالث:

1. لدينا 1.5ن

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle e^{ax}(e^{-ax}T)', \varphi\rangle = \langle (e^{-ax}T)', e^{ax}\varphi\rangle$$
$$= -\langle e^{-ax}T, a e^{ax}\varphi + e^{ax}\varphi'\rangle$$
$$= -\langle T, a\varphi + \varphi'\rangle = -a\langle T,\varphi\rangle + \langle T', \varphi\rangle$$
$$= \langle -aT + T', \varphi\rangle$$

أي $e^{ax}(e^{-ax}T)' = -aT + T'$

2. من السؤال الأول لدينا $T' - aT = 0$ يكافئ $e^{ax}(e^{-ax}T)' = 0$ 2ن

$$e^{ax}(e^{-ax}T)' = 0 \iff \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle e^{ax}(e^{-ax}T)', \psi\rangle = 0$$
$$\iff \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle (e^{-ax}T)', e^{ax}\psi\rangle = 0$$
$$\iff \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle (e^{-ax}T)', \varphi\rangle = 0$$

(يكفي أخذ $\psi = \frac{\varphi}{e^{ax}}$ لأن $\forall x \in \mathbb{R} : e^{ax} \neq 0$)

$$\iff (e^{-ax}T)' = 0$$
$$\iff e^{-ax}T = c \in \mathbb{R} \text{ ثابت}$$
$$\iff T = c\,e^{ax}, \ c \in \mathbb{R}$$

3. لدينا 2.5ن

$$T'' + aT' = 0 \iff (T')' - (-a)T' = 0$$
$$\iff e^{-ax}(e^{ax}T')' = 0 \quad (\text{حسب السؤال } 1)$$
$$\iff T' = c\,e^{-ax}, \ c \in \mathbb{R} \quad (\text{حسب السؤال } 2)$$
$$\iff T' - c\,e^{-ax} = 0$$
$$\iff \left(T + \frac{c}{a}e^{-ax}\right)' = 0 \quad (a \neq 0 \text{ لأن})$$
$$\iff T + \frac{c}{a}e^{-ax} = k, \ k \in \mathbb{R}$$
$$\iff T = k + \frac{c}{a}e^{-ax}, \ (c,k) \in \mathbb{R}^2.$$

كل الحسابات في السؤال الثاني والثالث بمفهوم التوزيعات.

Université HAMA LAKHDAR El Oued
Faculté de Sciences Exactes
Département de Mathématiques Classe : M1

Examen d'algèbre Linéaire
(Théorie des Modules)

Exercice 0.

Soit A un anneau intègre. Considérons le A-module A. Montrer que toute partie contenant plus d'un élément n'est pas libre.
En déduire que tout idéal I non trivial considérée comme A-module est libre si et seulement si il est principal.

Exercice 1.

Vérifier que $\{(2,0,0), (0,1,0)\}$ est une partie libre de $\mathbb{Z}^3$ mais qu'on ne peut pas la compléter en une base. Montrer que le système $S = \{(2,0,0), (3,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ engendre $\mathbb{Z}^3$ mais qu'on ne peut pas en extraire une base.

Exercice 2.

Pour quelles valeurs de a, b et c les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Exercice 3.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de A. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
2. Calculer $(A - I)^2$. Montrer que $A^n = nA - (1 - n)I$ en utilisant la formule du binome de Newton.

Université HAMA LAKHDAR El Oued
Faculté de Sciences Exactes
Département de Mathématiques Classe : M1

Corriger d'examen d'algèbre linéaire

Exercice 1. Soit B une partie de A contenant au moins deux éléments distincts a et b. On a

$$0 = (b)a - (a)b.$$

Si a et b sont libres, alors les coefficients a et b de cette combinaison linéaire sont nuls, soit $a = 0$ et $b = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Soit I un idéal de A. C'est un sous-module. S'il est libre, son rang est inférieur à celui de A. Donc il est égal à 1 et I est principal. Réciproquement, si I est principal, il est engendré par un e non nul x. Ce vecteur est libre car $ax = 0$ implique $a = 0$.

Exercice1

Les vecteurs $e_1 = (2,0,0)$ et $e_2 = (0,1,0)$ sont clairement linéairement indépendants. Montrons par l'absurde qu'on ne peut pas les compléter en une base. Soit $e_3 = (x,y,z)$ dans $\mathbb{Z}^3$ tels que e_1, e_2, e_3 soit une base de $\mathbb{Z}^3$. Alors il existe λ, μ, ν dans $\mathbb{Z}$ tels que $\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = (1,0,0)$. Cela conduit au système d'équations linéaires,

$$\begin{cases} 2\lambda + \nu x = 1 \\ \mu + \nu y = 0 \\ \nu z = 0 \end{cases}$$

En regardant la troisième équation on obtient $\nu = 0$ ou $z = 0$. Si $\nu = 0$ alors on trouve sur la première équation $2\lambda = 1$ ce qui est absurde. Si $z = 0$ alors tous les e_i sont dans le sous-module (strict) engendré par $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$. Dans tous les cas $\{e_1, e_2, e_3\}$ n'est pas une base.

On remarque que $(2,0,0) = 2(1,0,0)$ c'est-à-dire que le vecteur $(2,0,0)$ n'est pas indivisible. Dans les modules libres de rang finis sur les anneaux principaux les vecteurs d'une base sont indivisible, et réciproquement.

On note $v_1 = (2,0,0)$, $v_2 = (3,0,0)$, $v_3 = (0,1,0)$ et $v_4 = (0,0,1)$ de sorte que $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$ on a $(x,y,z) = x(v_2 - v_1) + y v_3 + z v_4$ donc S engendre $\mathbb{Z}^3$. Par l'unicité du rang des modules libres si il est possible d'extraire une base de S ce sera en enlevant un seul vecteur. En outre v_1 et v_2 sont linéairement dépendant car ils vérifient $3v_1 - 2v_2 = 0$. Donc si il est possible d'extraire une base de S ou bien $S \setminus \{v_1\}$ est une base ou bien $S \setminus \{v_2\}$ est une base. Mais $S \setminus \{v_2\}$ contient les vecteurs e_1 et e_2 du début de l'exercice donc n'est pas une base. En reprenant exactement le même raisonnement on peut voir qu'il n'est pas possible de compléter $\{v_2, v_3\}$ en une base. On a donc épuisé toutes les possibilités : S ne contient pas de base.

Exercice 2

Université HAMA LAKHDAR El Oued
Faculté de Sciences Exactes
Département de Mathématiques Classe : M1

Exercice3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculons les valeurs propres de A.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^3$$

La matrice A admet une valeur propre triple qui est $\lambda = 1$, elle ne peut pas être diagonalisable sinon son sous-espace propre serait de dimension 3 or $A \neq I$.

2. Calculons $(A - I)^2$.

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrons que $A^n = nA + (1 - n)I$ en utilisant la formule du binôme de Newton.

$$A^n = (A - I + I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (A - I)^k I^{n-k} = C_n^0 I^n + C_n^1 (A - I) = I + n(A - I) = nA + (1 - n)I$$

Car pour $k \geq 2$ on a $(A - I)^k = 0$.

UNIVERSITÉ ECHAHID HAMA LAKHDAR, EL-OUED
INSTITUT DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE
1^{er} *Master* : MATH
Semestre : 2016.1

— Contrôle LaTeX. —

Durée : 1^h : $30min$ ________________________ Documents Non Autorisés ____

1 Exercise (____/4,0 pts)

-Réecrire les codes (a) et (b) corrects , s'ils existent des erreurs :

a
```
\documentclass[11pt,a4paper]{artcle}
\begin{document}
\usepackage{amsfonts, amssymb,amsmath}
Latex document
\end{documents}
\end{document}
```

b
```
\documentclass[11pt,a4paper]{article}
Cour Latex
\begin{document}
\end{document}
```

2 Exercise ____/(8,0 pts)

- Ecrire les codes LaTeX.

x^a	x^{a^b}	x_a	x_{a_b}
x^14	$M_0(x_0,y_0)$	$(\mathbf{a}\times b\times c)^k$	$(\mathbf{-1})^n$

3 Exercise ____/(6,0 pts)

- Ecrire les codes LaTeX.

$$(1)=\begin{bmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{bmatrix} \quad (2)=\begin{bmatrix} \mathrm{f}_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \mathrm{f}_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) & \dots & f_{2n}(x) \\ \mathrm{f}_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) & \dots & f_{3n}(x) \end{bmatrix} \quad (3)=\left[\begin{pmatrix} \mathrm{f}_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \mathrm{f}_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \mathrm{f}_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) & \dots & f_{3n}(x) \end{pmatrix}\right]$$

$$(4)=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

____/((1)=1,0 pts),((2)=1,0 pts),((3)=2,0 pts),((4)=2,0 pts)

4 Exercise ____/(2,0 pts)

- Ecrire le code LaTeX.

$$\mathrm{M}=\begin{Vmatrix} \cos(x)+\sin(x) & \frac{X}{y} \\ \frac{1}{1+e^{(-x+a)}} & \mathrm{vec}(\mu)=\frac{1}{N}(\vec{c}_0+\vec{c}_1+\cdots+\vec{c}_N) \end{Vmatrix}$$

____Bon Courage____

1 Master

Corrigé de l'Examen de Géométrie Différentielle 1.

Exercice 01 : Considérons dans $\mathbb{R}^3$ la forme différentielle :

$$\omega = x\, dy\wedge dz - 2z\cdot f(y)\, dx\wedge dy + y\cdot f(y)\, dz\wedge dx$$

où $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est C^1 et $f(1)=1$

(2pts)

a) On détermine f pour que $d\omega = dx\wedge dy\wedge dz$.

$$d\omega = d(x\, dy\wedge dz - 2z f(y)\, dx\wedge dy + y f(y)\, dz\wedge dx)$$

$$= d(x\, dy\wedge dz) - 2d(z f(y)\, dx\wedge dy) + d(y f(y) dz\wedge dx)$$

(d linéaire) on utilise : $d(g\alpha) = dg\wedge\alpha + g\, d\alpha$

$$d(x\, dy\wedge dz) = dx\wedge dy\wedge dz + x\, \underbrace{d(dy\wedge dz)}_{}$$

$$d(z f(y)\, dx\wedge dy) = d(z f(y))\wedge dx\wedge dy + z f(y)\, \underbrace{d(dx\wedge dy)}_{0}$$

$$= (f(y)\, dz + z\underbrace{f'(y)\, dy}_{df(y)})\wedge dx\wedge dy$$

$$= f(y)\, dz\wedge dx\wedge dy + z f'(y)\, dy\wedge dx\wedge dy$$

$$= f(y)\, dz\wedge dx\wedge dy.$$

$$dz\wedge dx\wedge dy = dx\wedge dy\wedge dz.$$

$$d(y f(y)\, dz\wedge dx) = d(y f(y))\wedge dz\wedge dx + y f(y)\, d(dz\wedge dx)$$

$$= (f(y)\, dy + y f'(y)\, dy)\wedge dz\wedge dx.$$

$$= f(y)\, dy\wedge dz\wedge dx + y f'(y)\, dy\wedge dz\wedge dx.$$

$$dy\wedge dz\wedge dx = dx\wedge dy\wedge dz$$

$$= (f(y) + y f'(y))\, dx\wedge dy\wedge dz$$

donc : $d\omega = dx\wedge dy\wedge dz - 2f(y)\, dx\wedge dy\wedge dz + (f(y)+y f'(y))\, dx\wedge dy\wedge dz.$

$$d\omega = (1 + y f'(y) - f(y))\, dx\wedge dy\wedge dz.$$

$$d\omega = dx\wedge dy\wedge dz \iff 1 + y f'(y) - f(y) = 1 \iff$$

$$y f'(y) = f(y)$$

$\dfrac{f'(y)}{f(y)} = \dfrac{1}{y}$ donc $\ln|f(y)| = \ln|y| + C$ or : $f(1)=1$ donc : $C=0$

on a donc : $f(y) = y$ ou $f(y) = -y$

on prend $f(y) = y$ on a alors

$$\omega = -2yz\, dx \wedge dy + x\, dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx.$$

---

b) Déterminons f pour que $d\omega = 0$.

$$d\omega = \left(1 + y f'(y) - f(y)\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

2pts

$$d\omega = 0 \iff y f'(y) - f(y) + 1 = 0$$

$f(y) = 1$ est solution unique de l'équation différentielle.

et donc $\omega = x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx - 2z\, dx \wedge dy$.

---

c/ Déterminons f pour qu'il existe une forme :

$\omega_1 = P(x,y,z)\, dx + Q(x,y,z)\, dy$ Avec : $P(x,y,0) = Q(x,y,0) = 0$

et $\omega = d\omega_1$

2pts

$\omega = d\omega_1 \Rightarrow d\omega = d^2\omega_1 = 0$ donc : $f(y) = 1$

$$d\omega_1 = d(P(x,y,z)\, dx) + d(Q(x,y,z)\, dy)$$

$$= dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz\right) \wedge dy.$$

$$d\omega_1 = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx - \frac{\partial Q}{\partial z} dy \wedge dz$$

$$= -2z\, dx \wedge dy + y\, dz \wedge dx + x\, dy \wedge dz$$

$$d\omega_1 = \omega \iff \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = -2z \\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial z} = y \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial Q}{\partial z} = -x. \end{cases}$$

1 Master

Corrigé de l'Examen de Géométrie Différentielle 1.

Exercice 01 : Considérons dans $\mathbb{R}^3$ la forme différentielle :

$$\omega = x\, dy\wedge dz - 2z\cdot f(y)\, dx\wedge dy + y\cdot f(y)\, dz\wedge dx$$

où $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est C^1 et $f(1)=1$.

(2pts)

a) On détermine f pour que $d\omega = dx\wedge dy\wedge dz$.

$$d\omega = d(x\, dy\wedge dz - 2z\, f(y)\, dx\wedge dy + y f(y)\, dz\wedge dx)$$
$$= d(x\, dy\wedge dz) - 2\, d(z f(y)\, dx\wedge dy) + d(y f(y) dz\wedge dx)$$

(d linéaire) on utilise : $d(g\alpha) = dg\wedge\alpha + g\, d\alpha$

$$d(x\, dy\wedge dz) = dx\wedge dy\wedge dz + x\, \underbrace{d(dy\wedge dz)}_{0}$$

$$d(z f(y)\, dx\wedge dy) = d(z f(y))\wedge dx\wedge \underset{0}{dy} + z f(y)\, \underbrace{d(dx\wedge dy)}_{0}$$
$$= (f(y)\, dz + z\, \underbrace{f'(y)\, dy}_{d f(y)})\wedge dx\wedge dy$$
$$= f(y)\, dz\wedge dx\wedge dy + z f'(y)\, dy\underset{0}{\wedge} dx\wedge dy$$
$$= f(y)\, dz\wedge dx\wedge dy.$$

$$dz\wedge dx\wedge dy = dx\wedge dy\wedge dz.$$

$$d(y f(y)\, dz\wedge dx) = d(y f(y))\wedge dz\wedge dx + y f(y)\, \underset{0}{d(dz\wedge dx)}$$
$$= (f(y)\, dy + y f'(y)\, dy)\wedge dz\wedge dx.$$
$$= f(y)\, dy\wedge dz\wedge dx + y f'(y)\, dy\wedge dz\wedge dx.$$

$$dy\wedge dz\wedge dx = dx\wedge dy\wedge dz$$
$$= (f(y) + y f'(y))\, dx\wedge dy\wedge dz$$

donc : $d\omega = dx\wedge dy\wedge dz - 2 f(y)\, dx\wedge dy\wedge dz + (f(y) + y f'(y))\, dx\wedge dy\wedge dz.$

$$d\omega = (1 + y f'(y) - f(y))\, dx\wedge dy\wedge dz.$$

$$d\omega = dx\wedge dy\wedge dz \iff 1 + y f'(y) - f(y) = 1 \iff$$
$$y f'(y) = f(y)$$

$\dfrac{f'(y)}{f(y)} = \dfrac{1}{y}$ donc $\ln|f(y)| = \ln|y| + C$ or : $f(1) = 1$ donc : $C = 0$

(page ...)

$$\frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) = -x \iff Q(x,y,z) = -xz + f(x,y)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) = y \iff P(x,y,z) = yz + g(x,y)$$

$$P(x,y,0) = Q(x,y,0) = 0 \Rightarrow f = g = 0 \text{ d'où:}$$

$$P(x,y,z) = yz \text{ et } Q(x,y,z) = -xz \text{ et } \omega_1 = yz\,dx - xz\,dy$$

* En appliquant le théorème de Stocks $\int_S \omega = \int_S d\omega_1 = \int_{\partial S} \omega_1$

$\partial S =$ Cercle, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x^2 + y^2 = 1/2$.

on paramètre le Cercle : $x = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}}$; $y = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}}$; $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\int_S \omega = \int_{\partial S = (C)} \omega_1 = \int_\varphi yz\,dx - xz\,dy = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times d\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times d\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\int_S \omega = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} -\sin^2\varphi \, d\varphi - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{-2\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{-\pi}{\sqrt{2}}$$

<u>Exercice 02</u> : On pose : $Xf = \psi \circ \varphi$

$$\varphi = [Df(x), X(x)] \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \times E, \ \forall x \in E$$

4 pts

$$\psi : \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \times E \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \varphi \in C^1$$

$$(u, v) \longmapsto u(v) \qquad \psi \in C^p$$

bilinéaire Continue

$Xf : E \longrightarrow \mathbb{R} \in C^1$.

$$D(Xf)(x)(h) = D\psi[\varphi(x)].[D\varphi(x)(h)] =$$

$$D\psi[Df(x), X(x)].[D^2 f(x)(h), DX(x)(h)] =$$

$$\psi[Df(x), DX(x)h] + \psi[D^2 f(x)(h), DX(x)(h)]$$

$$D(Xf)(x)(h) = Df(x)[DX(x)(h)] + D^2f(x)[h, X(x)] \ , \forall x, h \in E$$

Si $Y : E \to E$ de classe C^p

alors :

$$Y(Xf)(x) = [D(Xf)(x)](Y(x)) = [Df(x) \circ DX(x)](Y(x)) + D^2f(x)[X(x), Y(x)].$$

Exercice 03 : Parmis les assertions suivantes, Répondez par vraie ou faux et Corrigez l'assertion fausse.

(1) 1. Toute ~~...~~ variété ~~est~~ ~~...~~ ~~...~~ peut être vue comme sous variété Vraie (et ceci et le théorème de whitney)

---

(2) 2. $\nabla^2_{V,W} \cdot f - \nabla^2_{W,V} \cdot f = \nabla_{T(V,W)} \cdot f$ FAUX

Corriger : $\nabla^2_{V,W} \cdot f - \nabla^2_{W,V} \cdot f = -\nabla_{T(V,W)} \cdot f$.

---

(2) 3. Pour : V, W, Z trois champs de Vecteurs on a :

$\nabla_{V,W} Z + \nabla_{W,Z} V + \nabla_{Z,V} W = 0$ identité de Jacobi FAUX

Corriger : c'est l'identité de Bianchi, ∇ Connexion linéaire

---

(2) 4. Si X, Y deux Champs de Vecteurs, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

$[fX, Y] = f[X, Y]$ FAUX

Corriger : $[fX, Y]g = (fX \circ Y)(g) - (Y \circ fX)(g)$
$= fX(Y(g)) - Y(fX(g)) = \cdots = f[X,Y] - Y(f)X$

---

(1) 5. Si $[X, Y] = 0$ alors X et Y Commutent Vraie

---

(2) 6. $T \otimes S = S \otimes T$ FAUX Corriger : $T \otimes S \neq S \otimes T$

FIN

$$\frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) = -x \iff Q(x,y,z) = -xz + f(x,y)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) = y \iff P(x,y,z) = yz + g(x,y)$$

$$P(x,y,0) = Q(x,y,0) = 0 \Rightarrow f = g = 0 \text{ d'où:}$$

$$P(x,y,z) = yz \text{ et } Q(x,y,z) = -xz \text{ et } \omega_1 = yz\,dx - xz\,dy$$

* En appliquant le théorème de Stocks $\int_S \omega = \int_S d\omega_1 = \int_{\partial S} \omega_1$

∂S = Cercle, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x^2+y^2 = 1/2$.

on paramètre le Cercle: $x = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}}$; $y = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}}$; $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\int_S \omega = \int_{\partial S = (C)} \omega_1 = \int_\varphi yz\,dx - xz\,dy = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times d\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times d\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\int_S \omega = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} -\sin^2\varphi\,d\varphi - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{-2\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{-\pi}{\sqrt{2}}$$

Exercice 02 : On pose : $X.f = \psi \circ \varphi$

4 pts

$$\varphi = [Df(x), X(x)] \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \times E, \ \forall x \in E$$

$$\psi : \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \times E \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \varphi \in C^1$$

$$(u,v) \longmapsto u(v) \qquad \psi \in C^p$$

bilinéaire Continue

$$Xf : E \longrightarrow \mathbb{R} \in C^p.$$

$$D(Xf)(x)(h) = D\psi[\varphi(x)].[D\varphi(x)(h)] =$$

$$D\psi[Df(x), X(x)].[D^2f(x)(h), DX(x)(h)] =$$

$$\psi[Df(x), DX(x)h] + \psi[D^2f(x)(h), DX(x)(h)]$$

ماستر رياضيات

***Full name:*…………………………….G:……**
***University year:*2016/2017**

Questions:

7.5

****Correct the verb between brackets:***

- Last week, we (to play) …played……………….a football match.
- I (to see)…see……….my parents everyday.
- I (to like)………like…………..lemonade very much.
- The girls always (to listen)…..listen……… to pop music.
- In 2017,I (to get)..will…get…my diploma.

7.5

****Change into passive voice***

-She is reading the newspaper now.
The newspaper is being read by her……………
-The cleaner has cleaned the office.
The office has been cleaned by the cleaner
-The people elected the president.
The president was elected by the people……
-The car killed the child.
The child was killed by the car……………………
-They often listen to music.
Music is often listened by them……………………

5

****Write the following terms in English:***

…………………………………………rectangle…………………:مستطيل
…………………………………………axis…………………………:محور
…………………………………………percentage…………………:نسبة مئوية
…………………………………………equation……………………:معادلة
…………………………………………cylinder……………………:اسطوانة

GOOD LUCK