

امتحان السادس الأول في مقياس الطرق العددية 1

التصميم 1: لنكن لدينا الدالة $f(x) = e^{-x} - x$ نريد حل المعادلة $f(x) = 0$ باستعمال طريقة نيوتن:

- 1- اكتب خوارزمية نيوتن لإيجاد الحل التقريبي لهذه المعادلة
- 2- من أجل $x_0 = 1$ أوجد حدود المتتالية (x_n) حتى الرتبة الرابعة
- 3- أحسب الخطأ في هذه الحالة

التصميم 2: لنكن لدينا المعادلة التفاضلية $y' = f(t, y) = -2ty^2$, $t \in [0, 5]$, $y(0) = 1$

- 1- اكتب خوارزمية رانج-كوتا 2 لإيجاد الحل التقريبي لهذه المسألة
- 2- أحسب القيمة التقريبية للحل عند اللحظة $t = 2$ باستعمال خطوة $h = 0.5$

التصميم 3: لنكن لدينا الجملة التالية:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 14 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

- 1- اكتب المسألة على الشكل $AX = b$ بحيث $X = (x_1, x_2, x_3)^t$
- 2- باستعمال طريقة الحذف نفوس أوجد $X = (x_1, x_2, x_3)^t$ حل هذه المسألة

5- حساب كتلة الناتج في حال كان مردود التفاعل 85% والمركب متفطرة 90%

Benzolohydro (متفاعل @), phenylhydrazine (متفاعل #)

$$n_{\text{متفاعل @}} = \frac{m}{M} = \frac{8 \times 104.4}{106.13} = 0.039 \text{ mol}$$

$$n_{\text{متفاعل #}} = \frac{8 \times 104.4}{198.14} = 0.028 \text{ mol}$$

ملاحظة: المتفاعل @ هو ابطأ من المتفاعل #

1 mol (متفاعل @) \rightarrow 1 mol (الناتج)

0.028 mol \rightarrow 0.028 mol

$$m_{\text{الناتج}} = 0.028 \times 286.24 = 8.101 \text{ g}$$

$$\frac{8.101 \times 85}{90} = \frac{\text{مردود التفاعل} \times m_{\text{الناتج}}}{m_{\text{التجريبية غير النقية}}} = \frac{m}{m_{\text{الناتج}}}$$

$$7.56 = m_{\text{الناتج}}$$

تصحيح امتحان المراسمي الأول في مقياس الطرق العددية 1.

التصحيح 1: (6 نقط) لدينا الدالة $f(x) = e^{-x} - x$ ، $f'(x) = -e^{-x} - 1$

1- خوارزمية نيوتن لإيجاد الحل التقريبي لهذه المعادلة

- التصريح ب: القيمة الابتدائية x_0 ، النوال $f(x)$ و $f'(x)$ ، عدد التكرارات الأعظمي N_{max} ، الدقة ϵ

- من أجل $n \leq N_{max}$

- حساب $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

- حساب الخطأ $e_n = x_{n+1} - x_n$

- (إذا كان $e_n \leq \epsilon$ أو $n \leq N_{max}$ توقف.

- من أجل

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.53788284 \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.56698699 \\ x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.56714328 \\ x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 0.56714329 \end{aligned}$$

3- حساب الخطأ $e = |x_4 - x_3| = 0.00000001 = 10^{-9}$

التصحيح 2: (7 نقط) نكن لدينا المعادلة التفاضلية $y' = f(t, y) = -2ty^2$ ، $t \in [0, 5]$ ، $y(0) = 1$

1- كتابة خوارزمية رانج- كوتا 2 لإيجاد الحل التقريبي لهذه المسألة

- التصريح ب: t_0, y_0 ، الدالة $f(t, y)$ ، الخطوة h ، T

- من أجل $n \leq \frac{T}{h}$

$$\begin{cases} K_1 = f(t_n, y_n) \\ K_2 = f(t_n + h, y_n + hK_1) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \end{cases}$$

2- حساب القيمة التقريبية للحل عند اللحظة $t = 2$ باستعمال خطوة $h = 0.5$

- حساب $t_0 = 0, y_0 = 1, h = 0.5$

$$\begin{cases} K_1 = f(t_0, y_0) = -2t_0y_0^2 = -2 \times 0 \times 1 = 0 \\ K_2 = f(t_0 + h, y_0 + hK_1) = -2 \times 0.5 \times 1 = -1 \\ y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) = 1 + \frac{0.5}{2}(0 + (-1)) = 0.75, y(0.5) \approx 0.75 \end{cases}$$

- حساب $t_1 = 0.5, y_1 = 0.75, h = 0.5$

$$\begin{cases} K_1 = f(t_1, y_1) = -2t_1y_1^2 = -2 \times 0.5 \times (0.75)^2 = -0.5625 \\ K_2 = f(t_1 + h, y_1 + hK_1) = f(1.0, 0.251953125) = -2 \times 1 \times (0.251953125)^2 = -0.1269607544 \\ y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) = 0.75 + \frac{0.5}{2}(-0.5625 - 0.1269607544) = 0.251953125, y(1) \approx 0.251953125 \end{cases}$$

- حساب $t_2 = 1, y_2 = 0.251953125, h = 0.5$

$$\begin{cases} K_1 = f(t_2, y_2) = -2t_2y_2^2 = -2 \times 1 \times (0.251953125)^2 = -0.1269607544 \\ K_2 = f(t_2 + h, y_2 + hK_1) = f(1.5, 0.1730947494) = -2 \times 1.5 \times (0.1730947494)^2 = -0.1065692998 \\ y_3 = y_2 + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) = 0.251953125 + \frac{0.5}{2}(-0.1269607544 - 0.1065692998) = 0.1730947494, y(1.5) \approx 0.1730947494 \end{cases}$$

- حساب $t_3 = 1.5, y_3 = 0.1730947494, h = 0.5$

$$\begin{cases} K_1 = f(t_3, y_3) = -2t_3y_3^2 = -2 \times 1.5 \times (0.1730947494)^2 = -0.0898853768 \\ K_2 = f(t_3 + h, y_3 + hK_1) = f(2.0, 0.1342004545) = -2 \times 2 \times (0.1342004545)^2 = -0.06569180296 \\ y_4 = y_3 + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) = 0.1730947494 + \frac{0.5}{2}(-0.0898853768 - 0.06569180296) = 0.1342004545, y(2) \approx 0.1342004545 \end{cases}$$

التصحيح 3: (7 نقط) نكن لدينا الجملة التالية

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 14 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

1- كتابة المسألة على الشكل $AX = b$ بحيث $X = (x_1, x_2, x_3)^T$

الرحلة الأولى: حذف x_1 من المعادلتين الثانية والثالثة بضرب طرفي المعادلتين في المصفوفة

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)} = M^{(1)} \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, b^{(2)} = M^{(1)} \cdot b = \begin{bmatrix} 14 \\ -3 \\ 26 \end{bmatrix}$$

نحصل على المعادلة $A^{(2)}X = b^{(2)}$ (2)

المرحلة الثانية: حذف x_2 من المعادلة الثالثة: نضرب طرفي المعادلتين (2) في المصفوفة

$$M^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(3)} = M^{(2)} \cdot A^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad b^{(3)} = M^{(2)} \cdot b^{(2)} = \begin{bmatrix} 14 \\ -\frac{13}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

نحصل على المعادلة $A^{(3)}X = b^{(3)}$ (3) وهي جملة ثلاثية عكسية.

نحل هذه الجملة

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 14 \\ \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = -\frac{13}{3} \\ -2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$-2x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -13 \Rightarrow x_1 = (14 - x_2)/3 = 9$$

ومنه الحل هو $(x_1, x_2, x_3)^T = (9, -13, 0)^T$