جامعة الشهيد محمد الاخضر عمارة بالـــوادي

كلية العلوم الدقيقة — سنة 2 رياضيات

قسم الرياضيات — 2018/01/14

شعبة الرياضيات — المدة: ساعة و نصف

**اختبار مقياس الطبولوجيا**

**<u>التمرين 1</u>: (6 نقط)** في كل ما يلي من التمرين $(E,\mathcal{T})$ هو فضاء طبولوجي و $A$ و $B$ مجموعتين جزئيتين من $E$.

نعلم أن $\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}} \subset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$. نفرض أن $A\cap \bar{B} = \bar{A}\cap B = \emptyset$. 1) استنتج أن $A\cap B=\emptyset$ ثم $\overline{A}\bigcap\left(B^{o}\right)^{C}=\overline{A}$.

2) برهن أن $\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}} = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ (يكفي اثبات أن $\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}} \subset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$).

3) برهن أن $Fr\left(A\bigcup B\right)=Fr\left(A\right)\bigcup Fr\left(B\right)$.

**تذكير:** $\overset{\circ}{A}$ داخلية $A$ ، $\overline{A}$ لصاقة $A$ ، $Fr\left(A\right)=\overline{A}-\overset{o}{A}=\overline{A}\bigcap\left(\overset{o}{A}\right)^{C}$ ، $x\in A^{o}\Leftrightarrow \exists G\in\tau : x\in G\subset A$

**<u>التمرين 2</u>: (7 نقط)** نزود $E=\left]0,+\infty\right[$ بالمسافة العادية لـ $\mathbb{R}$ والتي نرمز لها بـ $d\left(x,y\right)=\left|x-y\right|$.

1) بين أن $(E,d)$ فضاء غير تام.
2) نزود $E=\left]0,+\infty\right[$ بمسافة ثانية $\delta\left(x,y\right)=\left|\ln x-\ln y\right|$ ولتكن $(x_n)$ متتالية كوشية من $\left(E,\delta\right)$.
   - أثبت أن المتتالية $\left(\ln x_n\right)$ متقاربة في $\left(\mathbb{R},d\right)$ ، نرمز لنهايتها فيه بـ $y$.
   - بيّن أن $x=e^{y}$ هي نهاية للمتتالية $(x_n)$ في $\left(E,\delta\right)$، واستنتج أن $\left(E,\delta\right)$ فضاء تام.(مع التعليل).

**<u>التمرين 3</u>: (4 نقط)** ليكن $(E,\mathcal{T})$ فضاء طبولوجي متراص و $U$ مفتوح من $E$ ولتكن $\left\{F_i, i\in I\right\}$ أسرة مغلقات تقاطعها في $U$ أي $\bigcap_{i\in I}F_i\subset U$.

1) بيّن أن $\left\{F_i^{C}, i\in I\right\}\bigcup\left\{U\right\}$ هي تغطية مفتوحة لـ $E$.
2) بيّن أنه توجد أسرة جزئية منتهية $\left\{F_i, i\in I_0\right\}$ من الاسرة السابقة تحقق $\bigcap_{i\in I_0}F_i\subset U$.

**<u>التمرين 4</u>: (3 نقط)** ليكن $\left(E,\left\|\bullet\right\|\right)$ فضاء شعاعي نظيمي.

1) برهن أنه من أجل كل $y,x$ من $E$ يكون $\left\|x\right\|+\left\|y\right\|\leq\left\|x+y\right\|+\left\|x-y\right\|$. (خذ $x=\frac{1}{2}\left(x+y\right)+\frac{1}{2}\left(x-y\right)$).
2) استنتج أن $\left\|x\right\|+\left\|y\right\|\leq 2\max\left\{\left\|x+y\right\|,\left\|x-y\right\|\right\}$ ثم بين أنه في $\mathbb{R}^2$ مزودة بالنظيم $\left\|(a,b)\right\|_{\infty}=\max\left\{|a|,|b|\right\}$ و من أجل $x=\left(1,0\right),\ y=\left(0,1\right)$ يكون $\left\|x\right\|+\left\|y\right\|=2\max\left\{\left\|x+y\right\|,\left\|x-y\right\|\right\}$.

# حـــــل الاختبار

**التمرين 1:**

1) بما أن $A\bigcap B\subset A\bigcap \overline{B}$ فإن $A\bigcap B=\phi$ . ومن جهة ثانية: $A^o\subset A\Rightarrow A^o\bigcap \overline{B}\subset A\bigcap \overline{B}=\Phi$ وهذا يعني أن $\overline{B}\subset\left(A^o\right)^C$ وبالمثل $\overline{A}\subset\left(B^o\right)^C$ . إذن $\overline{A}\bigcap\left(B^o\right)^C=\overline{A}$ .

2) لتكن $x\in\left(A\bigcup B\right)^o$ إذن يوجد مفتوح $G$ حيث $x\in G\subset A\bigcup B$ . من السؤال السابق $A\bigcap B=\phi$ إذن $x\in A$ أو $x\in B$ هذا لا يعني أن $G\subset A$ أو $G\subset B$.

إذا كان $x\in A$ فإنه حسب الفرضية $x\notin\overline{B}$ وبالتالي يوجد مفتوح $H$ حيث $H\bigcap B=\Phi,x\in H$ وعليه $x\in G\bigcap H\subset A$ وهذا يعني أن $x\in A^o$ , وبنفس الطريقة نبرهن أنه إذا كان $x\in B$ فإن $x\in B^o$ .

3) لدينا $Fr\left(A\bigcup B\right)\subset Fr\left(A\right)\bigcup Fr\left(B\right)$ نبرهن العكس.

$$Fr\left(A\bigcup B\right)=\overline{A\bigcup B}\bigcap\left(\overset{o}{A}\bigcup\overset{o}{B}\right)^C=\left(\overline{A}\bigcup\overline{B}\right)\bigcap\left(\overset{o}{A}\right)^C\bigcap\left(\overset{o}{B}\right)^C$$

$$=\left[\overline{A}\bigcap\left(\overset{o}{A}\right)^C\bigcap\left(\overset{o}{B}\right)^C\right]\bigcup\left[\overline{B}\bigcap\left(\overset{o}{A}\right)^C\bigcap\left(\overset{o}{B}\right)^C\right]$$

$$=\left[\overline{A}\bigcap\left(\overset{o}{A}\right)^C\right]\bigcup\left[\overline{B}\bigcap\bigcap\left(\overset{o}{B}\right)^C\right]=Fr\left(A\right)\bigcup Fr\left(B\right)$$

**التمرين 2:**

1) $\left(E,\delta\right)$ غير تام لأن $E$ ليست مغلقة في $\mathbb{R}$ أو لآن المتتالية $x_n=\dfrac{1}{n}$ كوشية متقاربة ونهايتها $0\notin E$ .

2) بما أن $\left(x_n\right)$ كوشية في $\left(E,\delta\right)$ فإنه من أجل $\varepsilon>0$ توجد رتبة $n_0\in\mathbb{N}$ بحيث: $\forall n,m\geq n_0;\left|\ln x_n-\ln x_m\right|<\varepsilon$ وهذا يعني أن $\left(\ln x_n\right)$ كوشية في $\left(\mathbb{R},d\right)$ وبما أن $\left(\mathbb{R},d\right)$ تام فإن $\left(\ln x_n\right)$ متقاربة فيه.

**ملاحظة**: اثبات أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\ln x_n-y\right|=0$ لا معنى له لأن $y$ غير موجود في هذه المرحلة ولا يوجد إلا بعد إثبات أن المتتالية متقاربة.

3) بما أن $\left(\ln x_n\right)$ متقاربة في $\left(\mathbb{R},d\right)$ فإنه يوجد $y\in\mathbb{R}$ حيث $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\ln x_n-y\right|=0$

4) نضع $x=e^y$ إذن $y=\ln x,x>0$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\ln x_n-\ln x\right|=0$ وهذا يعني أن $x=\delta-\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ وبما أن $x\in E$ فإن $\left(E,\delta\right)$ تام.

**التمرين 3:**

1) بما أن $\bigcap\limits_{i\in I}F_i\subset U$ فإن $\bigcup\limits_{i\in I}F_i^C=\left(\bigcap\limits_{i\in I}F_i\right)^C\supset U^C$ وبالتالي $E=U\bigcup U^C\subset U\bigcup\left(\bigcup\limits_{i\in I}F_i^C\right)$ وهذا يعني أن $\left\{F_i^C,i\in I\right\}\bigcup\left\{U\right\}$ هي تغطية مفتوحة لـ $E$ .

2) بما أن $E$ متراص فإن التغطية $\{F_i^C, i \in I\} \cup \{U\}$ تقبل تغطية جزئية منتهية $\{F_i^C, i \in I_0\} \cup \{U\}$ أي

$E = U \cup \left( \bigcup_{i \in I} F_i^C \right)$ وبالتالي $\Phi = U^C \cap \left( \bigcup_{i \in I} F_i^C \right)^C = U^C \cap \left( \bigcap_{i \in I_0} F_i \right)$ وهذا يعني أن $\bigcap_{i \in I_0} F_i \subset U$.

**التمرين 4:**

1) من خواص النظيم المتراجحة المثلثية $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$، وبوضع $x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$ يكون

$\|x\| = \left\| \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y) \right\| \le \frac{1}{2}\|x+y\| + \frac{1}{2}\|x-y\|$ وبالمثل $y = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(y-x)$ يكون

$\|y\| = \left\| \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(y-x) \right\| \le \frac{1}{2}\|x+y\| + \frac{1}{2}\|y-x\|$ وبالجمع نجد: $\|x\| + \|y\| \le \|x+y\| + \|x-y\|$

2) بما أن $\|x+y\| \le \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$ و $\|x-y\| \le \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$ يكون

$\|x\| + \|y\| \le 2\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$

من أجل $x = (1,0),\ y = (0,1)$ يكون $\|x\|_\infty = \max\{1,0\} = 1,\ \|y\|_\infty = 1$ و

$\|x+y\| = \|(1,1)\| = \max\{1,1\} = 1$ و $\|x-y\| = \|(1,-1)\| = \max\{1,1\} = 1$ وعليه

$\|x\| + \|y\| = 2,\ 2\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\} = 2$.