Université Echahid Hama Lakhdar (El Oued)

Correction d'examen Final
(Algèbre Linéaire)
09 Janvier 2017

A.A. YOUMBAI
La durée: 1h30 min. Classe M1 Mathématiques

Exercice 0: (Généralités sur les Modules)

Soit A un anneau commutatif Soit M un A-module monogène (c-a-d : il existe un $m \in M$ tel que $M = Am$).

Montrer que $End_A(M)$ est isomorphe à $\frac{A}{Ann_A(M)}$.

Solution

On doit supposer A commutatif. Pour toute A-algèbre B l'application $a \in A \longrightarrow a.1_B \in B$ est un morphisme de A-algèbre. En particulier pour tout A-module M on a un morphisme de A algèbre canonique $\varphi : A \longrightarrow End_A(M)$ défini par $(\varphi(a))(m) = a.m$, autrement dit par l'opération externe. Montrons que $Ann_A(M) = \ker \varphi$. Soit $x \in Ann_A(M)$. Alors pour tout $m \in M$ on a $0 = x.m = (\varphi(x))(m)$. Donc $x \in \ker \varphi$. Réciproquement soit $x \in \ker f$. Alors l'application $m \longrightarrow x.m$ est l'endomorphisme nul de M. Donc pour tout $m \in M$ on a $x.m = 0$. Donc $x \in Ann_A(M)$. On obtient ainsi en toute généralité un morphisme injectif $f : A/Ann_A(M) \longrightarrow End_A(M)$. Montrons que si en outre M est monogène alors ce morphisme est surjectif. Soit $f \in End_A(M)$ et soit $m \in M$ tel que $M = Am$. Alors $f(m) \in M$ et donc il existe $\lambda \in A$ tel que $f(m) = \lambda.m$. Mais alors pour tout $x = \mu.m \in M$ on a $f(x) = f(\mu.m) = \mu.f(m) = \mu(\lambda.m) = \lambda.(\mu.m) = \lambda.x$. Ce qui montre que $f = \varphi(\bar{\lambda}) \in \operatorname{Im} \varphi$. On a donc bien isomorphie entre $A/Ann_A(M)$ et $End_A(M)$.

Cela démontre aussi que $End_A(M)$ est commutatif (puisque A l'est).

Exercice 1: (Module Libre)

1. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module libre.
2. Montrer que si tout A-module est libre, alors A est un corps (ou l'anneau nul).

Solution : Si $m \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n\cdot m = 0$, donc $\{m\}$ n'est pas une famille libre. Donc toute partie libre de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est vide, donc $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas libre.

Plus généralement, si $I \neq 0$ est un idéal de A et $\bar{a} \in A/I$, alors $i\cdot\bar{a} = 0$ pour tout élément de $I \neq \{0\}$ donc $\bar{a}$ n'est pas libre, donc toute famille libre de A/I est vide. Donc A/I ne peut être libre que si $I = 0$ ou $A/I = 0$.

Donc si tout A-module est libre, A n'a que 0 et A comme idéaux, donc est un corps.

Exercice 2: (Suite Exacte)

Soit A un anneau, M un A-module et N et P des sous-modules de M.

Soit

$$\begin{array}{rcl} f : N \cap P & \longrightarrow & N \oplus P \\ x & \longrightarrow & (x, x) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} g : N \oplus P & \longrightarrow & N + P \\ (y, z) & \longrightarrow & y - z \end{array}$$

Montrer que la suite $0 \longrightarrow N \cap P \xrightarrow{f} N \oplus P \xrightarrow{g} N + P \longrightarrow 0$ est exacte.

Solution :

1. f est injective : si $f(x) = (x, x) = (0, 0)$ alors $x = 0$,
2. g est surjective, par définition de $N + P$,

3. $g \circ f = 0$, par définiton de f et g,
4. Si $g(y,z) = 0$ alors $y = z \in N \cap P$ donc $(y,z) \in im(f)$.

Exercice 3: (Reduction des Endomorphismes)

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2, puis A^3.
2. A l'aide d'un polynôme annulateur de A, trouver les valeurs propres de A et montrer que A est diagonalisable.

Solution :

$A^2 = \begin{pmatrix} 2J & 0 \\ 0 & 2J \end{pmatrix}$
$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4J \\ 4J & 0 \end{pmatrix}$.
En déduit les relations suivantes :
$A^3 - 4A = 0$, d'ou les polynôme annulateur $f(X) = X^3 - 4X = X(X-2)(X+2)$.
On calcul A^4 est en déduit $A^4 - 2A^2 = 0$, d'ou les polynôme annulateur $g(X) = X^4 - 2X^2 = X^2\left(X^2 - 2\right)$.
comme f est minimal, alors ces racines $\{-2, 0, 2\}$ sont exactement les valeurs propres de A.
La matrice A est diagonalisable car : $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -2, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 2$