3) La stabilité :

Sous les conditions : (I) $\left(1+\frac{(3-ih)k}{h}\right) \geq 0 \ \forall i$

1 et (II) $\left(\frac{(-3+ih)k}{h}\right) \geq 0 \ \forall i$

on a :

$$|u_i^{n+1}| = \left| \left(1+\frac{k(3-ih)}{h}\right)u_i^n + \left(\frac{k(-3+ih)}{h}\right)u_{i-1}^n \right|$$

$$\leq \left(1+\frac{k(3-ih)}{h} + \frac{k(-3+ih)}{h}\right) \max_{1\leq i\leq N} |u_i^n|$$

1

$$|u_i^{n+1}| \leq 1 \max |u_i^n|, \ \forall n$$

$$\Longrightarrow \max_{1\leq i\leq N} |u_i^{n+1}| < \max_{1\leq i\leq N} |u_i^n|$$

$$\Longrightarrow \|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty$$

$$\vdots$$

$$\leq \|u^0\|_\infty$$ 1 (par récurrence)

Alors, le schema est stable sous les conditions (I) et (II)

Université de Chahid Hamma Lakhdar d'El-oued

Faculté des sciences exactes
Département de Mathématiques

$3^{ème}$ année Licence Math - S6-
Méthode numériques pour EDO et EDP

Année universitaire: 2021-2022
Durée: 1 h

Sujet d'examen

Exercice 01:

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) + Cu(x) = f(x)\,, & x \in \,]0,1[, \\ u(0) = u(1) = \alpha. \end{cases}$$

Où k et C sont des constantes positives, $f(x)$ une fonction continue. On cherche à approcher la solution u par la méthode de différences finies. Soient $N \in IN^*$ et $h = \frac{1}{N+1}$. On note u_i la valeur recherchée de u au point ih pour $i = 0, \dots, N+1$.

1- Donner une discrétisation par différences finies de ce problème.

2- Ecrire le système obtenu sous la forme matricielle $A_h u_h = b_h$. Donner A_h et b_h.

3- Montrer que $A_h v_h \geq 0 \Rightarrow v_h \geq 0$.

Exercice 02:

Soit u l'unique solution du problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (1+x)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in \,]-4,4[,\quad t \in \,]0,T[, \\ u(4,t) = u(-4,t) = 0, & \forall t \in \,]0,T[, \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in \,]-4,4[. \end{cases} \qquad (2)$$

Où $u_0 \in L^2]-4,4[$.

1- Donner un schéma d'approximation de (2) par différences finies **décentré arrière** à pas constant en espace et **Euler explicite** à pas constant en temps.

2- Ecrire la forme matricielle de ce schéma.

3- Montrer que le schéma est stable et sous quelles conditions sur k et h.

Module X 3ème Math, 2022

Corrigé d'examen

Exercice 01

1) Pour $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + o(h^2)$$ 0,5

alors, l'équation discrète est :

$$-k\,\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + C\,u_i = f_i \quad i = \overline{1.N}$$

1

Pour les conditions aux limites, on a :

$$u_0 = u(0) = \alpha \quad , \quad u_{N+1} = u(x_{N+1}) = u(1) = \alpha$$ 0,5

Alors, on obtient le système :

$$\begin{cases} -\frac{k}{h^2}u_{i+1} + \left(C + \frac{2k}{h^2}\right)u_i - \frac{k}{h^2}u_{i-1} = f_i, \quad i = \overline{1.N} \\ u_0 = u_{N+1} = \alpha \end{cases}$$ 1

1

2) La forme matricielle : 1,5

$$\begin{bmatrix} \left(C + \frac{2k}{h^2}\right) & -\frac{k}{h^2} & & 0 \\ -\frac{k}{h^2} & \left(C + \frac{2k}{h^2}\right) & -\frac{k}{h^2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -\frac{k}{h^2} \\ 0 & & -\frac{k}{h^2} & \left(C + \frac{2k}{h^2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + \frac{\alpha k}{h^2} \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N + \frac{\alpha k}{h^2} \end{bmatrix}$$

$$A_h U_h = b_h$$

3) $A_h v_h \geq 0 \Longrightarrow v_h \geq 0$ (La conservation de positivité)

$$A_h v_h = \begin{bmatrix} \left(C+\frac{2k}{h^2}\right) & -\frac{k}{h^2} & & 0 \\ -\frac{k}{h^2} & \left(C+\frac{2k}{h^2}\right) & -\frac{k}{h^2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & -\frac{k}{h^2} & \left(C+\frac{2k}{h^2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$$

$$\left(v_h = (v_1, v_2, \dots, v_N)^t\right)$$

$$A_h v_h = \begin{bmatrix} \left(C+\frac{2k}{h^2}\right)v_1 - \frac{k}{h^2}v_2 \\ +\frac{k}{h^2}v_1 + \left(C+\frac{2k}{h^2}\right)v_2 - \frac{k}{h^2}v_3 \\ \vdots \\ -\frac{k}{h^2}v_{N-2} + \left(C+\frac{2k}{h^2}\right)v_{N-1} - \frac{k}{h^2}v_N \\ -\frac{k}{h^2}v_{N-1} + \left(C+\frac{2k}{h^2}\right)v_N \end{bmatrix} \geq 0$$

1

Supposons que $p = \min \{ i \in \{1, \dots, N\} / v_i = \min_{1 \leq j \leq N} v_j \}$

0,5

On suppose que $p = 1$: et $v_1 < 0$

$\left(c + \frac{2k}{h^2}\right) v_1 - \frac{k}{h} v_2 \geq 0 \Rightarrow \frac{k}{h^2}(v_1 - v_2) + \left(c + \frac{k}{h^2}\right) v_1 \geq 0$

$\Rightarrow \underbrace{\left(c + \frac{k}{h^2}\right)}_{\geq 0} v_1 \geq \frac{k}{h^2} \underbrace{(v_2 - v_1)}_{\geq 0}$ 1

$\Rightarrow v_1 \geq 0$ (contradiction)

$\Rightarrow v_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, N}$.

pour $p \in \{2, \dots, N-1\}$ et $v_p < 0$

$-\frac{k}{h^2} v_{p-1} + \left(c + \frac{2k}{h^2}\right) v_p - \frac{k}{h^2} v_{p+1} \geq 0$

$\Rightarrow \frac{k}{h^2}(v_p - v_{p-1}) + c v_p + \frac{k}{h^2}(v_p - v_{p+1}) \geq 0$

$\Rightarrow \underset{\geq 0}{c} v_p \geq \frac{k}{h^2} \underbrace{(v_{p-1} - v_p)}_{\geq 0} + \frac{k}{h^2} \underbrace{(v_{p+1} - v_p)}_{\geq 0}$

$\Rightarrow v_p \geq 0$ contradiction.

$\Rightarrow v_i \geq 0 \quad \forall i = 1, N$ 01

Pour $p = N$

$\left(c + \frac{2k}{h^2}\right) v_N - \frac{k}{h^2} v_{N-1} \geq 0$

$\Rightarrow \left(c + \frac{k}{h^2}\right) v_N \geq \frac{k}{h^2} (v_{N-1} - v_N) \geq 0$

Contradiction ($v_N < 0$)

$\Rightarrow v_N \geq 0$ et $v_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, N}$. 1

Exercice 02

1) Soient $k = \frac{T}{M}$ et $h = \frac{8}{N+1}$ $/ N, M \in \mathbb{N}^*$

$\Omega_{h,k} = \{ (x_i, t_n) = (-4 + ih, nk) / i = \overline{0, N+1}, n = \overline{0, M} \}$ 1

$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + o(k)$ 0,5

$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_n) = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} + o(h)$ (sch. D. Arrière) 0,5

On obtient alors l'équation discrète :

$$(*) \begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + (-3 + ih) \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = 0 & i = \overline{1, N} \\ & n = \overline{0, M-1} \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \quad u_i^0 = u_0(x_i), & n = \overline{1, M}, i = \overline{1, N} \end{cases}$$ 1 1

2) La forme matricielle :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} u_i^{n+1} = \left(1 + \frac{(3 - ih) k}{h}\right) u_i^n + \frac{(-3 + ih) k}{h} u_{i-1}^n \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \quad u_i^0 = u_0(x_i) \end{cases}$$ 1

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{(3-h)k}{h}\right) & & & 0 \\ \frac{k(-3+2h)}{h} & \left(1 + \frac{(3-2h)k}{h}\right) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \frac{k(-3+Nh)}{h} & \left(1 + \frac{(3-Nh)k}{h}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}^{n}$$ 1,5