جامعة الشهيد حمه لخضر-الوادي

قسم الرياضيات — السنة الجامعية: 2022/2021

المستوى: سنة ثالثة رياضيات — مقياس: مدخل الى نظرية المؤثرات

الاسم واللقب:................... — الفوج:......

الحل النموذجي لامتحان الدورة العادية للسداسي الثاني

التمرين الأول: (8ن)

(1) ليكن $S,T \in \mathcal{L}(H)$ حيث H فضاءا هيلبرتيا. اثبت ان :

- $\|ST\|_{\mathcal{L}} \leq \|S\|_{\mathcal{L}}\|T\|_{\mathcal{L}}$.

لدينا

$$\|STx\|_H = \|S(Tx)\|_H \leq \|S\|_{\mathcal{L}(H)}\|Tx\|_H$$

$$\leq \|S\|_{\mathcal{L}(H)}\|T\|_{\mathcal{L}(H)}\|x\|_H$$

$$\Rightarrow \|ST\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|S\|_{\mathcal{L}(H)}\|T\|_{\mathcal{L}(H)}$$

- اذا كان S و T قابلان للقلب فان ST قابلا للقلب و $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

$$ST(ST)^{-1} = I_H \Rightarrow S^{-1}ST(ST)^{-1} = S^{-1}$$

$$\Rightarrow (St)^{-1} = T^{-1}S^{-1}.$$

(2) لتكن $T_n : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$، بحيث $T_nx = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ..., 0, ...)$.

- احسب $\|T\|_{(\ell^2)}$.

$$\|Tx\|^2_{\ell^2} \sum_{1}^{n} x_i^2$$

$$\sum_{i}^{\infty} x_i^2 = \|x\|^2_{\ell^2}$$

$$\Rightarrow \|Tx\|_{\ell^2} \leq \|x\|_{\ell^2}$$

$$z = e_1 = (1, 0, 0...) \Rightarrow \frac{\|Tx\|_{\ell^2}}{\|x\|_{\ell^2}} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\ell^2)}$$

$$\Rightarrow \|T\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} = 1.$$

- بين ان المتتالية (T_n) متقاربة نحو المؤثر الحيادي. هل هذا التقارب منتظما؟

$$\|(T_n - I_H)x\|_{\ell^2} = R_n \to 0$$

$$\|T_n - I_H\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} = 1 \nrightarrow 0$$

ومنه التقارب ليس منتظما.

التمرين الثاني: (12ن)

في الفضاء الهيلبرتي $\ell^2(\mathbb{C})$ نعتبر المؤثرين الخطيين T, S من $\ell^2(\mathbb{C})$ في نفسه والمعرفين من اجل كل $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ من $\ell^2(\mathbb{C})$ كمايلي:

$$Tx = (0, 2x_1, x_2, 2x_3, x_4, 2x_5, ...), \quad Sx = (0, 0, x_1, x_2 ...).$$

(1) **احسب** $\|T\|_{(\ell^2)}$ **،ثم بين ان** $\|S\|_{(\ell^1)} = 1$.

$$\|T\|^2_{(\ell^2)} = 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + ...$$

$$\leq 4\|^2 x\|_{(\ell^2)}$$

$$\Rightarrow \|T\|_{(\ell^2)} \leq 2\|x\|_{(\ell^2)}$$

من اجل $z = e_1 = (1; 0, 0, ...)$ **لدينا**

$$\|Tz\|_{(\ell^2)} = 2, \|z\|_{(\ell^2)} = 1 \Rightarrow \frac{\|Te_1\|_{(\ell^2)}}{\|e_1\|_{(\ell^2)}} = 2 \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Te_1\|_{(\ell^2)}}{e_1} = \|T\|_{(L)}$$

$$\Rightarrow \|T\|_{(L)} = 2.$$

$$\|S\|^2_{(\ell^2)} = x_1^2 + x_2^2 + ... = \|x\|^2_{(\ell^2)}$$

$$\Rightarrow \|S\|_{(L)} = 1.$$

(2) **اوجد** T^* **المؤثر القرين لـ** T.

$$\langle Tx, y\rangle = 2x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_3} + 2x_3\overline{y_4} + ...$$

$$= x_1(2\overline{y_2}) + x_2\overline{y_3} + ...$$

$$= \langle x, (2y_2, y_3, 2y_4, ...)\langle x, T^* y\rangle.$$

$$\Rightarrow T^* y = (2y_2, y_3, 2y_4, ...).$$

(3) **بين ان** $T^2 = 2S$.

اجسب T^k**، من اجل كل** $k \in \mathbb{N}^*$ **، ثم استنتج نصف القطر الطيفي.**

$$T^2 = (0, 0, 2x_1, 2x_3, ...) = 2(0, 0, x_1, x_2, ...) = 2S$$

$$k = 2n \Rightarrow T^{2n} = (\sqrt{2})^{2n} S^n$$

$$k = 2n+1 \Rightarrow T^{2n+1} = (\sqrt{2})^{n} S^n T$$

$$\Rightarrow \|T^k\|^{\frac{1}{k}} = \sqrt{2}\|S^k\|^{\frac{1}{k}} \to \sqrt{2}$$

لان

$$\|S^k\| = 1.$$

(١). **بين ان T لايملك اية قيمة ذاتية.**
بمان T متباين فان الصفر ليست قيمة ذاتية.
لنرهن بالخلف، نفرض ان $\lambda \neq 0$ قيمة ذاتية لـــ T اذن يوجد x غير معدوم يحقق:

$$Tx = \lambda x$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \lambda x_1; ..., x_n = \lambda x_{n-1}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

وهذا تناقض، اذن T ليس له اية قيمة ذاتية.