تصحيح الإمتحان

التمرين الأول : 08 نقاط

1) تكون المصفوفة A ذات قطر مسيطر تماما إذا تحقق:

① $$|a_{ii}| > \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{3} |a_{ij}|.$$

لكن :

السطر الثاني : $2 = 1+1$ (حسب الأسطر)

② و العمود الثاني : $2 = 1+1$ (حسب الأعمدة)

ومنه لا يتحقق الشرط فإن المصفوفة A ليست ذات قطر مسيطر تماما.

2) حل الجملة بطريقة غوص للحذف : $[A : B]$

م) $a_{11} = 2 \neq 0$

$$L_1^{(1)} \rightarrow L_1/2 : \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1/2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$ 0,5

ب)

$$L_2^{(1)} \longrightarrow L_2 + L_1^1 : \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & : & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & : & 4 \\ 0 & -1 & 2 & : & 1 \end{bmatrix}$$ 1

ج) $a_{22}^1 = \frac{3}{2} \neq 0$

$$L_2^2 \longrightarrow \frac{L_2^1}{3/2}, \quad L_3^1 \longrightarrow L_3 + L_3^2 : \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & : & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & : & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$ 1,5

التعويض:

- $\left(\frac{4}{3} z = \frac{11}{3}\right) \Rightarrow z = \frac{11}{4}$

2

- $\left(y - \frac{2}{3} z = \frac{8}{3}\right) \Rightarrow y = \frac{9}{2}$
- $\left(x - \frac{1}{2} y = 1\right) \Rightarrow x = \frac{13}{4}$

$$X = \begin{pmatrix} 13/4 \\ 9/2 \\ 11/4 \end{pmatrix}$$

حلول الجملة.

التمرين الثاني: 12 نقطة

1) الشكل التكراري لطريقة جاكوبي:

1

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -x_2^{(k)} + \frac{1}{2} x_3^{(k)} + 1 \\ x_2^{(k+1)} = 1 \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2} x_1^{(k)} - x_2^{(k)} + 1 \end{cases}$$

أي :

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2

$$X^{(k+1)} = T_J X^{(k)} + C_J$$

حيث T_J تمثل المصفوفة التكرارية لطريقة جاكوبي.

2) الشعاع الطيفي لـ T_J : $\rho(T_J) = \max_i |\lambda_i|$

حيث λ_i القيم الذاتية وتمثل حلول المعادلة المميزة: $\det(T_J - \lambda I) = 0$ ، لدينا:

3

$$\det(T_J - \lambda I) = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) = 0$$

ومنه: $\lambda_1 = 0 \ , \ \lambda_2 = -\frac{1}{2} \ , \ \lambda_3 = \frac{1}{2}$

إذن: $\rho(T_J) = \frac{1}{2} < 1$

4

بما أن: $\rho(T_J) < 1$ فإن طريقة جاكوبي تتقارب.

3) الشكل التكراري لطريقة غوص-سايدل.

لدينا :

$$
(1)\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = -x_2^{(k)} + \frac{1}{2}x_1^{(k)} + 1 \\
x_2^{(k+1)} = 1 \\
x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}x_2^{(k+1)} - x_2^{(k+1)} + 1
\end{cases}
$$

لإيجاد الصيغة التكرارية لطريقة غوص-سايدل

1 أي الشكل : $X^{(k+1)} = T_G X^{(k)} + C_G$

-يجب تعويض قيم $x_1^{(k+1)}$ و $x_2^{(k+1)}$ في عبارة $x_3^{(k+1)}$

بقيمها بدلالة $x_1^{(k)}$ و $x_2^{(k)}$ ، 1 ، 3 باستعمال

طريقة التفكيك.)

بالتعويض نجد :

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = -x_2^{(k)} + \frac{1}{2}x_3^{(k)} + 1 \\
x_2^{(k+1)} = 1 \\
x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{2}x_2^{(k)} + \frac{1}{4}x_3^{(k)} + \frac{1}{2}
\end{cases}
$$

3

ومنه :

$$
T_G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix} ; \quad C_G = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}
$$