الحل النموذجي لامتحان
جبر 2

التمرين 0 :

1) $F\cap G$ فش ج من E :

- $0\in F, 0\in G \Rightarrow 0\in F\cap G$
- $x\in F\cap G \ , \ y\in F\cap G \ , \ \lambda\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} x\in F, y\in F \Rightarrow \lambda x+y\in F \\ x\in G, y\in G \Rightarrow \lambda x+y\in G \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda x+y\in F\cap G$$

2) الفضاء $F+G$:

$$F+G=\{x+y \ / \ x\in F, y\in G\}$$

3) $\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)$

التمرين 1 :

1) $N^t=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $N^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $N^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) $(I_3-N)(I_3+N+N^2)=I_3+N+N^2-N-N^2-N^3$
$=I_3$

3) مقلوب B : هو مصفوفة B^{-1} حيث $B.B^{-1}=I_3$

بما أن $B(I_3+N+N^2)=I_3$

إذا B قابلة للقلب ومقلوبها (I_3+N+N^2)

التمرين 2 :

$$F = \{ v \in E \,/\, f(v) = m v \}$$

1) $f(0) = 0 = m \cdot 0 \Rightarrow 0 \in F \Rightarrow F \neq \phi$

2) $v, u \in F$:

$$f(u+v) = f(u) + f(v) = mu + mv = m(u+v)$$

$$\Rightarrow u+v \in F$$

3) $u \in F$, $\lambda \in (\mathbb{R}, +, \cdot)$

$$f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda (m u) = m(\lambda u)$$

$$\Rightarrow (\lambda u) \in F$$

$$f(x,y) = (x+y, x)$$

$$\operatorname{Ker} f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = (0,0) \}$$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x+y, x) = (0,0) \}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = y = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{ (0,0) \}$$

$$\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$$

حسب النظرية : $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{Ker} f$$
$$= 2 - 0$$
$$= 2$$

• المصفوفة M_f المرافقة لـ f في الأساس القانوني

$$f(e_1) = f(1,0) = (1,1) = 1e_1 + 1e_2$$
$$f(e_2) = f(0,1) = (1,0) = 1e_1 + 0e_2$$

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• مصفوفة العبور من (e_i) إلى (b_i) :

$$b_1 = (1,0) = 1e_1 + 0e_2$$
$$b_2 = (1,1) = 1e_1 + 1e_2$$
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

•• حساب P^{-1} (وهي أيضا مصفوفة العبور من (b_i) إلى (e_i))

$$e_1 = (1,0) = 1b_1 + 0b_2$$
$$e_2 = (0,1) = -b_1 + 1b_2$$
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• المصفوفة M'_f المرافقة لـ f في الأساس $\{b_1, b_2\}$

$$M'_f = P^{-1} M_f P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$