الحل النموذجي في امتحان الهندسة

التمرين الأول:

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longmapsto \gamma(t) = (3t - t^3,\ 3t^2,\ 3t + t^3)$$

1) 1- حساب السرعة المتوسطة عند t=0 :

ن1

$$\gamma'(t) = (3 - 3t^2,\ 6t,\ 3 + 3t^2)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(3-3t^2)^2 + (6t)^2 + (3+3t^2)^2} = \sqrt{18 + 36t^2 + 18t^4}$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{18}$$

2- حساب طول γ في المجال $[0,1]$:

ن1

$$\underset{[0,1]}{l(\gamma)} = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^1 \sqrt{18 + 36t^2 + 18t^4}\, dt$$

$$= \sqrt{18}\int_0^1 \sqrt{1 + 2t^2 + t^4}\, dt = 3\sqrt{2}\int_0^1 (1 + u^2)\, du$$

$$= 3\sqrt{2}\left[u + \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = 3\sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{3}\right) =$$

$$3\sqrt{2}\ \frac{3+1}{3} = 4\sqrt{2}$$

$$\boxed{\underset{[0,1]}{l(\gamma)} = 4\sqrt{2}}$$

2) 1) حساب مركبات الشعاع المماسي من أجل $t \in [0,1]$:

ن1

$$\vec{T} = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\frac{3 - 3t^2}{1 + t^2},\ \frac{6t}{1 + t^2},\ \frac{3 + 3t^2}{1 + t^2}\right)$$

$$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2},\ \frac{t}{1 + t^2},\ \frac{1 + t^2}{1 + t^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2},\ \frac{t}{1 + t^2},\ 1\right)$$

3) حساب مركبات الشعاع الناظمي من أجل $t \in [0,1]$

ن1

$$\vec{N} = \frac{\gamma''}{\|\gamma''\|} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\frac{-6t}{1 + t^2},\ \frac{6}{1 + t^2},\ \frac{6t}{1 + t^2}\right)$$

$$\boxed{\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-2t}{1 + t^2},\ \frac{2}{1 + t^2},\ \frac{2t}{1 + t^2}\right)}$$

3) نضع $t = tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$ نوجد $\phi'(\theta) = \vec{T}\left(Tg\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$

$$\phi'(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1 - Tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + Tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} ; \frac{2Tg\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + Tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} ; 1\right)$$

0,5

$$\frac{1 - Tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + Tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1 - \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\theta/2}}{1 + \frac{\sin^2\theta/2}{\cos^2\theta/2}} = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} \quad \text{---} (1)$$

$$\frac{2Tg\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + Tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{2 \cdot \frac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2}}{1 + \frac{\sin^2\theta/2}{\cos^2\theta/2}} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{---} (2)$$

$$= \sin\left(2 \cdot \frac{\theta}{2}\right) = \sin\theta.$$

من (1) و (2) نجد:

$$\phi'(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta, \sin\theta, 1)$$

منه: $\phi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta, -\cos\theta, \theta)$

4) نوع التوسيط $\phi(\theta)$:

0,5

$\|\phi'(\theta)\| = 1$ توسيطة ناظمية.

5) معلم فرينيه

0,5

$$\{\phi(\theta), \vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$$

$$\vec{T}(\theta) = \phi'(\theta) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta, \sin\theta, 1)}$$

$$\vec{N}(\theta) = \phi''(\theta) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin\theta, \cos\theta, 0)}$$

$$\vec{B}(\theta) = \phi' \wedge \phi'' = \boxed{\frac{1}{2}(-\cos\theta, -\sin\theta, 1)}$$

6) الإنحناء:

$$k(\theta) = \|\phi''(\theta)\|$$

0,5

$$\boxed{k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

التمرين الثاني :

$a>b$ ، $a,b \in \mathbb{R}^{+*}$

$$\phi : [0,2\pi]\times[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\phi(u,v) = \big((a+b\cos v)\cos u,\ (a+b\cos v)\sin u,\ b\sin u\big)$$

1 حساب E ، F ، G :

$$E = \| -(a+b\cos v)\sin u,\ (a+b\cos v)\cos u,\ 0)\|^2$$

ن1 $\boxed{E = (a+b\cos v)^2}$ 1

ن1 $G = \|(-b\sin v\cos u,\ -b\sin v\sin u,\ b\cos v)\|^2$

$\boxed{G = b^2}$ 1

ن1 $\boxed{F=0}$ 1

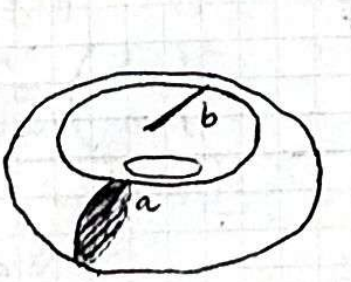
2 حساب الجزء المظلل من الطارة

$$Air(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{b^2(a+b\cos v)^2}\,du\,dv$$

ن1 $$= b\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (a+b\cos v)\,du\,dv = 2b\pi\int_0^{2\pi}(a+b\cos v)\,dv$$

$\boxed{Air(S) = 4ab\pi^2}$ 1



التمرين الثالث : اجيب بنعم او لا

1) ← لا : لأن في المنحنيات المستوية لا يوجد شعاع ناظم ثانوي (1) (1) 02

2) ← صحيح (2) 02

3) ← لا : الانحناء معدوم (1) (1) 02

4) ← لا : الذي هو غير موجود في المنحنيات المستوية (1) (1) 02

5) ← لا : منحنى منتظم معناه $\gamma' \neq 0 \,,\ \forall t$ (1) (1) 02

انتهى