وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الشهيد حمه لخضر- الوادي -

جامعة الوادي
Université D'El Oued

رقم التسجيل

معهد : العلوم الدقيقة

الإسم واللقب : الأستاذ الحوذعي

مقياس : الحساب التحليلي رقم : القسم : الفوج :

التاريخ : جانفي 2022

الرقم السري

يمنع على الطالب وضع أي إشارة على ورقة الإمتحان

الرقم السري

العلامة

20/

حل التمرين الأول

① حدد الاحداثيات الجيبية ودرجات الحرية :

$(M,m) = 2(2) = 4 = \begin{cases} x_M, y_M \\ x_m, y_m \end{cases}$

② درجات الحرية :

أولا نجد عدد القيود أو الروابط :

لدينا ... ① القيد الأول

$\forall t.\ y_m = \sin\varphi$

$\forall t. \begin{cases} x_M = l\sin\varphi \\ y_M = -l\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow x_M^2 + y_M^2 = l^2$ القيد ②

وعليه

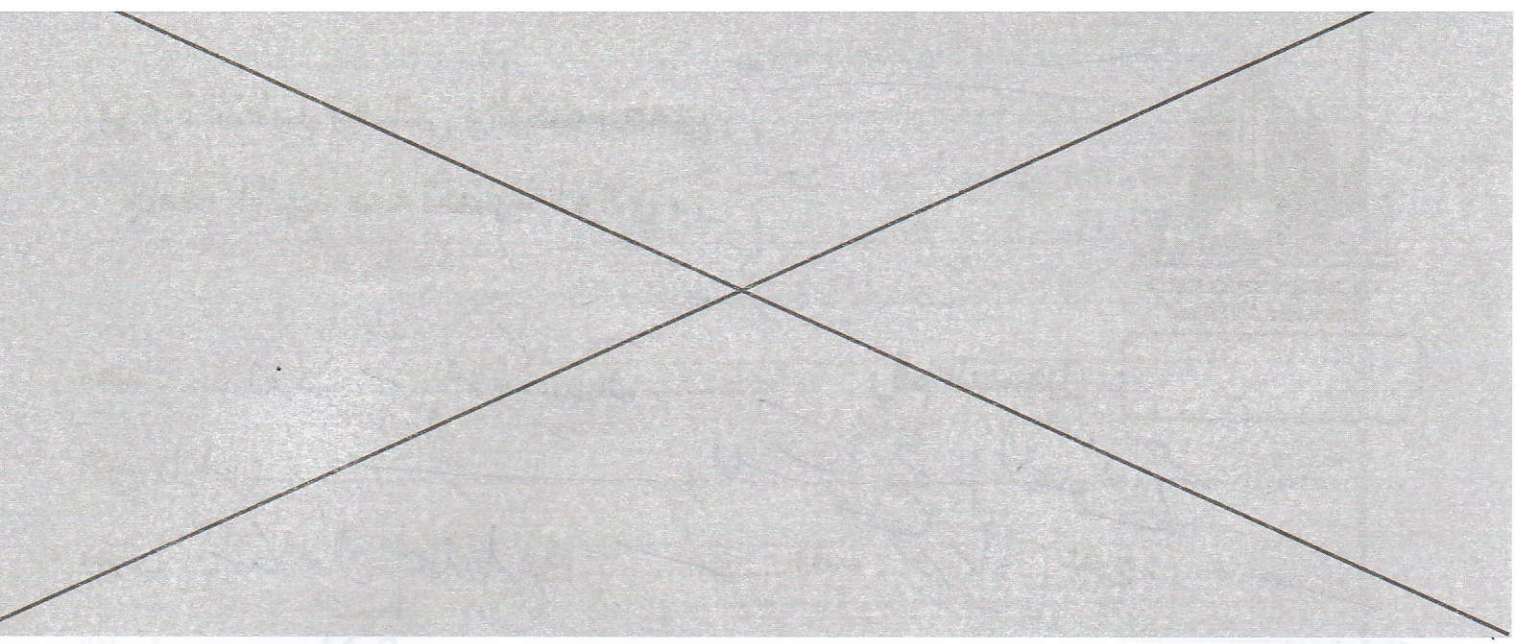
$② - ① = 1 = (x_m, \varphi)$

واختصارا في الكتابة فقط :

$(x_m = x,\ \varphi = \varphi)$

وعليه درجة الحرية

①



③ إيجاد تابع لاغرانج L للجملة المدروسة:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{M}{2}\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi\right) + Mgl\cos\varphi - \frac{k}{2}x^2$$

$\vec{OM} = x\vec{i} \Rightarrow \vec{V}_m = \dot{x}\vec{i}$ (2.b) مبيانياً:

$$\Rightarrow T_m = \frac{m}{2}\dot{x}^2$$

$$\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{mM} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l\sin\varphi \\ -l\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_M = \begin{pmatrix} \dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 + l\dot{\varphi}\sin\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow T_M = \frac{M}{2}\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi\right)$$

$$\Rightarrow T_{tot} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{M}{2}\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi\right)$$

$U_m = 0$, $U_M = -Mgl\cos\varphi$, $U_k = \frac{k}{2}x^2$ (3.b)

$$\Rightarrow U_{tot} = -Mgl\cos\varphi + \frac{k}{2}x^2$$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{M}{2}\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi\right) + Mgl\cos\varphi - \frac{k}{2}x^2$$

نحو المطلوب:

④ عبارة H بدلالة $\dot{x}, \dot{\varphi}, x, \varphi$ ثم عبارة $\ddot{x}$ و $\ddot{\varphi}$ بدلالة P_x, P_φ

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + M\dot{x} + Ml\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = Ml^2\dot{\varphi} + Ml\dot{x}\cos\varphi$$

$$H = \sum_{i=1}^{2} \dot{q}_j P_j - L$$

$$= \dot{x}P_x + \dot{\varphi}P_\varphi - L$$

$$= (m\dot{x}^2 + M\dot{x}^2 + Ml\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi) + (Ml^2\dot{\varphi}^2 + Ml\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi) - L$$

$$= m\dot{x}^2 + M\dot{x}^2 + 2Ml\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi - L$$

$$= \frac{2m}{2}\dot{x}^2 + \frac{2M}{2}\dot{x}^2 + \frac{2\cdot 2Ml\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi}{2} - \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{M}{2}\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi\right) + U$$

$$= \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{M}{2}\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi\right) + U$$

ثم بعد الحساب نجد:

$$\ddot{x} = \frac{\left[P_x - \frac{\cos\varphi}{l}P_\varphi\right]}{\left[M + m - M\cos^2\varphi\right]}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{P_\varphi}{Ml^2} - \frac{\ddot{x}}{l}\cos\varphi$$

نعوض $\ddot{x}$ بقيمتها السابقة

ثم نعين معادلات هاملتون

$$q_j = x \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial P_x} \\ \dot{P}_x = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

$$q_j = \varphi \Rightarrow \begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial P_\varphi} \\ \dot{P}_\varphi = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} \end{cases}$$

التمرين الثاني

هذا التمرين هو موضوع الامتحان الوطني لدورة 2017 / العادية (معادلة) مع الحل المفصل موجود في الموقع.