جامعة الشهيد حمّه لخضر بالوادي
كليّة العلوم الدقيقة
قسم الرياضيات

السنة الجامعية: 2022/2021
المستوى: ثالثة رياضيات

تصحيح امتحان الدورة العاديّة لمقياس معادلات الفيزياء الرياضية

التمرين الأول: (7 ن)

نعتبر المعادلة التفاضليّة الجزئيّة:

$$xu_x - yu_y = -\frac{u^2}{x} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (E)$$

1- أوجد الحل العام للمعادلة (E).

الجملة المميزة لـ (E) هي:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} = -x\frac{dz}{z^2} \qquad 01$$

بالمكاملة نجد

$$xy = C_1$$
$$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = C_2 \qquad 01$$

وعليه التكاملين الأوليين لـ (E) هما

$$\begin{cases} \phi_1(x,y,z) = xy \\ \phi_2(x,y,z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{x} \end{cases} \qquad 01$$

ومنه الحل العام لـ (E) يعطى بالشكل الضمني

$$\boxed{(x,y,u) \longmapsto \Gamma\left(xy, \frac{1}{u} + \frac{1}{x}\right) = \text{Constante}} \qquad 01$$

حيث F دالة ليست ثابتة قابلة للمفاضلة بكفاية.

0,5

2- هل حل المعادلة (E) الذي يحقق: $u(0,y) = y^2$ موجود (برر إجابتك).

المنحني الابتدائي للمسألة هو محور التراتيب تمثيله الوسيطي

$\Gamma(0,t)$ 0,5

وهو مميز لـ (E) لأنّ:

01 $\gamma_2'(t)\cdot a(\gamma(t)) - \gamma_1'(t)\cdot b(\gamma(t)) = 1\times 0 - 0\times t = 0$

وعليه حسب مبرهنة إما المسألة لا تقبل حلول أو تقبل عدد غير منته من الحلول 0,5

لو قبلت حلّ لكان من شكل الحل العام ولكن في شكل الحل العام لا يمكن لـ x أن يأخذ القيمة 0 0,5

وعليه المسألة لا تقبل حلول.

التمرين الثاني: (13 ن)

I – عيّن العناصر الذّاتية للمسألة الحادية التالية:

$$\begin{cases} X''-kX=0 \\ X(0)=X'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases} \qquad \text{حيث } k<0$$

$K=-\mu^2$

شكل الحل العام للمعادلة $X''+\mu^2X=0$

هو: $X(x)=A\cos(\mu x)+B\sin(\mu x)$ (0,5)

حسب الشرط $X(0)=0$ نجد $A=0$ (0,5)

وعليه

$X(x)=B\sin(\mu x)$

$X'(x)=B\mu\cos(\mu x)$

حسب الشرط $X'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ نجد:

$X'\left(\frac{\pi}{2}\right)=B\mu\cos\left(\mu\frac{\pi}{2}\right)=0$ (0,5)

معناه أن $\mu\frac{\pi}{2}=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ ، $n=0,1,2,\dots$

وعليه

$\mu=(2n+1)$ (0,5)

وبالتالي العناصر الذاتية للمسألة هي

$$\begin{cases} \lambda_n=-(2n+1)^2 & \leftarrow \text{قيم ذاتية} \\ X_n(x)=\sin\left((2n+1)x\right) & \leftarrow \text{دوال ذاتية} \end{cases}$$ 01

II - نعتبر المسألة الحاديّة التالية:

$$(BVP):\begin{cases} u_t=4u_{xx}-u & 0<x<\dfrac{\pi}{2}, \quad t>0 \\ u(0,t)=u_x\left(\dfrac{\pi}{2},t\right)=0 & ,\quad t\geq 0 \\ u(x,0)=\phi(x) & ,0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

1- ما هو نمط المعادلة التفاضليّة الجزئيّة المرفقة بالمسألة (BVP).

$\Delta(x,t)=0$ (0,5)

المعادلة ت ج المرفقة بـ (BVP)

هي معادلة مكافئية (0,5)

وهي خطيّة متجانسة (0,5)

2- أعطي التفسير الفيزيائي للمسألة (BVP).

(1) المعادلة $u_t=4u_{xx}-u$

تعبّر على معادلة انتشار الحرارة على طول القطعة $[0,\pi/2]$ في البعد 1 (0,5)

(2) $u(0,t)=u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0$

تعبّر على الشروط الحادية على حافة القطعة المستقيمة $[0,\pi/2]$ (0,5)

(3) $u(x,0)=\phi(x)$ تعبّر على الحرارة الابتدائية (عند الزمن الابتدائي) $t=0$ (0,5)

3 - مستعملا طريقة فصل المتغيرات (طريقة فوريبه) حل المسألة (BVP).

(أكتب اهم الخطوات فقط)

بوضع $u(x) = X(x)\cdot T(t)$ 0,5

بالتعويض في م ت ج

$$u_t = 4u_{xx} - u$$

نجد

$$T'\cdot X = 4TX'' - T\cdot X$$

بالقسمة على $4T\cdot X$ نجد

$$\frac{T'X}{4TX} = \frac{4TX''}{4T\cdot X} - \frac{TX}{4TX} \quad 0,5$$

$$\Rightarrow \frac{T'}{4T} = \frac{X''}{X} - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{T'}{4T} + \frac{1}{4} = \frac{X''}{X} = \overbrace{\text{Constante}}^{K}$$

$$\frac{T'+T}{4T} \Rightarrow \begin{cases} X'' - KX = 0 & 0,5 \\ T' + (1-4K)T = 0 & 0,5 \end{cases}$$

مسألة ستورم ليوفيل المرفقة بـ (BVP) هي

حسب ماسبق $\begin{cases} X'' - KX = 0 \\ X(0) = X'(\pi/2) = 0 \end{cases}$ 0,5

$$n = 0,1,2,\dots \quad \begin{cases} X_n(x) = \sin(2n+1)x \\ \lambda_n = -(2n+1)^2 \end{cases}$$

لحل المعادلة $T' + (1+4(2n+1)^2)T = 0$

نجد

$$T_n(t) = e^{-(1+4(2n+1)^2)t}$$

نقص نقطة

و بما أن المعادلة خطية ومتجانسة فإن حلها يعطى بالعلاقة

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 0} b_n e^{-(1+4(2n+1)^2)t} \sin(2n+1)x \quad 01$$

وحسب الشرط الابتدائي نجد

$$\phi(x) = u(x,0) = \sum_{n\geq 0} b_n \sin(2n+1)x \quad 0,5$$

وحسب سلاسل فورييه نجد

$$b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \phi(x)\sin(2n+1)x\,dx \quad n = 0,1,2,3,\dots \quad 0,5$$

4- أحسب حل المسألة (BVP) في الحالة:

$\phi(x) = 5\sin(3x)$.

لنحسب المعاملات

$$b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} 5\sin(3x)\sin(2n+1)x\,dx$$

بما أن الجملة $\left(\sin(2n+1)x\right)_{n\geq 0}$ متعامدة 0,5

وهنا نستعمل بالنسبة للجداء السلمي

$$\langle u,v\rangle = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} u(x)\,v(x)\,dx$$

فإن: $b_0 = 0$ 0,5

و $b_n = 0 \quad \forall n \geq 2$

يبقى فقط

$$b_1 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} 5(\sin(3x))^2\,dx = 5 \quad 0,5$$

ومنه حل المسألة (BVP) هو

$$u(x,t) = 5\,e^{-37t}\sin(3x) \quad 0,5$$

بالتوفيق للجميع