جامعة الوادي
كلية العلوم الدقيقة (قسم الرياضيات)

السنة الجامعية 2021\2022
18 جانفي 2022

تصحيح إمتحان الدورة العادية في مقياس الأمثلية

المستوى : ثالثة رياضيات
المدّة : 1 سا

التمرين الأول: [12] نعتبر التابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x^4+y^4-2(x-y)^2$.

1. عيّن النقاط الحرجة لـ f : $a=(0,0),\ b=(\sqrt{2},-\sqrt{2}),\ c=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.(3ن)
2. حدّد طبيعة النقاط الحرجة مع التبرير المختصر. (4.5ن)

بالنسبة لـ a :

على المسار $(x,y)=(t,t)$ حيث $t>0$ لدينا $f(x,y)=f(t,t)=2t^4>0$ و على المسار $(x,y)=(s,0)$ حيث $s\in]0,\sqrt{2}[$ لدينا $f(x,y)=f(s,0)=s^2(s^2-2)<0$. نستنتج أنّ $f(a)=0$ ليست قيمة قصوى.

بالنسبة لـ b :

لدينا $n=2$ و $s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(b)=4,\ r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(b)=20=t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(b)$ و منه $\triangle=s^2-rt=-384<0$ و $r>0$. إذن $f(b)=-8$ قيمة صغرى محلية.

بالنسبة لـ c :

لدينا $n=2$ و $s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(c)=4,\ r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c)=20=t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c)$ و منه $\triangle=s^2-rt=-384<0$ و $r>0$. إذن $f(c)=-8$ قيمة صغرى محلية.

3. أثبت أنّ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2:\ f(x,y)\geq 2||(x,y)||^2-162$ حيث $||.||$ النظيم الإقليدي. (1.5ن)

يمكن أن نكتب

$$f(x,y)\geq 2||(x,y)||^2-162 \Leftrightarrow \underbrace{x^4+y^4-4(x^2+y^2)+4xy+162}_{h(x,y)}\geq 0.$$

من المتراجحة الشهيرة $xy\geq -\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ ينتج $h(x,y)\geq x^4+y^4-6(x^2+y^2)+162=(x^2-3)^2+(y^2-3)^2+144\geq 0$ و منه المتراجحة المطلوبة صحيحة.

4. مما سبق إستنتج أنّ المسألة التصغيرية: إيجاد $(\overline{x},\overline{y})\in\mathbb{R}^2$ بحيث $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)=f(\overline{x},\overline{y})$ تقبل حلين يطلب تعيينهما. (3ن)

لدينا $\mathbb{R}^2$ مغلق و غير محدود و f ناقصي (حسب السؤال 3.) و مستمر، إذن f يقبل على الأقل نقطة صغرى شاملة على $\mathbb{R}^2$. بما أنّ f يملك قيمة صغرى وحيدة هي -8 (محلية) مدركة عند b و c المسألة التصغيرية تقبل حلين و لدينا $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)=f(b)=f(c)=-8$.

التمرين الثاني: [08] نعتبر التابع

$$\forall x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:\quad g(x)=\int_{-1}^{1}(t^6+x_1^2t^2+x_2^2-2x_1t^4-2x_2t^3+2x_1x_2t)dt.$$

1. عيّن $A\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ، $b\in\mathbb{R}^2$ و $c\in\mathbb{R}$ حتى g يكتب من الشكل $g(x)=\frac{1}{2}<Ax,x>-<b,x>+c$. **الجواب:**

$$A=\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\ 0\end{pmatrix},\quad c=\frac{2}{7}.\quad (\text{ن}1+\text{ن}1+\text{ن}2)$$

2. بإختصار، أثبت أنّ المسألة التصغيرية: **إيجاد** $\overline{x}\in\mathbb{R}^2$ **بحيث** $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^2}g(x)=g(\overline{x})$ تقبل حل وحيد. (4ن)

لدينا $\mathbb{R}^2$ مغلق، **محدب** و غير **محدود** و g تابع مستمر. التابع $\theta(x)=\frac{1}{2}<Ax,x>+c$ **محدب** تماما كون A معرفة موجبة و بما أنّ $\rho(x)=-<b,x>$ **محدب**، التابع $g=\theta+\rho$ **محدب** تماما. بإستعمال **متراجحة** كوشي شوارتز و كون A متناظرة معرفة موجبة، التابع g ناقصي. نستنتج أنه يوجد عنصر وحيد $\overline{x}\in\mathbb{R}^2$ **يحقق** $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^2}g(x)=g(\overline{x})$.