Analyse fonctionnelle appliquée **Examen (corrigé)**

Exercice 1 (4 points)
Soit un ouvert borné (non vide) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de frontière Γ "assez régulière".
Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

(i) $C^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ et $C(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.
(ii) $H_0^2(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ et $W^{1,3}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.
(iii) $C^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$ et $C(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$.
(iv) $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$.

Réponse :

(i) *(1 point)*

La pro $C^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ et $C(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ **n'est pas vraie.**

(ii) *(1 point)*

La pro $H_0^2(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ et $W^{1,3}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ **est vraie.**

(iii) *(1 point)*

La pro $C^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$ et $C(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ **est vraie.**

(iv) *(1 point)*

La pro $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$ **est vraie.**

Exercice 2 *(6 points)*
Soit I un intervalle (non vide) ouvert dans $\mathbb{R}$).

(1) Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{I})$ et tout x et y dans I $(x \geqslant y)$, on a

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \|\varphi'\|_{L^2(I)} |x-y|^{\frac{1}{2}} \qquad (*)$$

(2) En déduire que l'inégalité $(*)$ reste vraie dans $H^1(I)$,

$$\forall u \in H^1(I), \forall (x,y) \in I \times I, \quad \text{on a} \quad |u(x) - u(y)| \leqslant \|u'\|_{L^2(I)} |x-y|^{\frac{1}{2}}.$$

Réponse :

(1) *(3 points)*
$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\overline{I})$, pour tout x et y dans I $(x \geqslant y)$, on a $\varphi(x) - \varphi(y) = \int_y^x \varphi'(t)dt$. Ainsi, à l'aide de l'inégatlité de Hölder (ici Cauchy-Schwarz : $p = q = 2$), on en déduit facilement que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \|\varphi'\|_{L^2(I)} |x-y|^{\frac{1}{2}} \qquad (*)$$

(2) *(3 points)*
Puisque que $\mathcal{D}(\overline{I})$ e $H^1(I)$, pour tout $u \in H^1(I)$ il existe une suite $\{\varphi_n\}_{n \geqslant 1}$ dans $\mathcal{D}(\overline{I})$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n = u$ (dans $H^1(I)$). Donc pour tout n, φ_n vérifie l'inégalité $(*)$. Ainsi, (vu la continuité de la valeur ab de la norme) par passage à la limite on obtient l'inégalité $(*)$ dans $H^1(I)$.

Exercice 3 *(10 points)*
Soient $f \in C([0,\,1])$ et λ un réel positif ($\lambda > 0$). Considérons le problème aux valeurs limites

$$(P) \qquad \begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) = f(x), & \textit{pour } x \in]0,\,1[, \\ u'(0) = -1,\ u'(1) = 0. \end{cases}$$

(i) Formuler le problème variationnel associé au problème (P).
(ii) Rappeler la définition d'une solution faible u du problème (P).
(iii) Montrer l'existence et l'unicité de la solution faible du problème (P).

Réponse :

(i) *(2,5 points)*

On multiplie l'équation différentielle du problème (P) par une fonction $v \in H^1(]0,\,1[)$, on intègre sur l'intervalle $]0,\,1[$, et à l'aide d'une intégration par partie on obtient

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \lambda\int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Tenant compte de

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \lambda\int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx + v(0).$$

Donc, en considérant l'e $H = H^1(]0,\,1[)$, la forme bilinéaire (sur H)

$$a(u,v) := \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \lambda\int_0^1 u(x)v(x)dx \quad \forall u \textbf{ et } v \textbf{ dans } H^1(]0,\,1[),$$

et la forme linéaire (sur H)

$$L(v) := \int_0^1 f(x)v(x)dx + v(0), \quad \forall v \in H^1(]0,\,1[)$$

la formulation variationnelle de (P) e

$$(P_{var}) \qquad \begin{cases} \textbf{Trouver } u \in H, \quad \textbf{tel que} \\ a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H, \end{cases}$$

(ii) *(1,5 point)*

Toute solution du problème variationel (P_{var}) e (P).

(iii) Il suffit de montrer que (P_{var}) satisfait toute
Milgram. En effet

(1) *(1 point)*
$H = H^1(]0,\, 1[)$ e

(2) *(1 point)*
La bilinéarité de $a(.,.)$ et la linéarité de L sont facilement vérifiable
la continuité de L on a be **TD**

$$\forall x_0 \in [0,\, 1], \forall v \in H^1(]0,\, 1[)\ \exists c_1 > 0,\ t.q.:\quad |v(x_0)| \leqslant c_1 \|v\|_{H^1(]0,\,1[)}.$$

(3) *(1,5 point)*
La continuité de $a(.,.)$ **:** pour tout u et v dans $H^1(]0,\, 1[)$, en utilisant l'inégatlité de Hölder (ici Cauchy-Schwarz : $p = q = 2$), on a

$$|a(u,v)| \leqslant \|u^{'}\|_{L^2}\|v^{'}\|_{L^2} + \lambda\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}$$

Ainsi, en po $c := \max\{1, \lambda\}$, et à l'aide de l'inégatlité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$ on obtient

$$|a(u,v)| \leqslant c\|u\|_{H^1(]0,\,1[)}\|v\|_{H^1(]0,\,1[)}.$$

Par conséquent, $a(.,.)$ étant une forme bilinéaire bornée, elle e continue.

(4) *(1,5 point)*
La coercivité de $a(.,.)$ **:** pour tout v dans $H^1(]0,\, 1[)$,on a

$$a(v,v) = \|v^{'}\|_{L^2}^2 + \lambda\|v\|_{L^2}^2$$

et en po $\alpha := \min\{1, \lambda\}$, on a la coercivité

$$a(v,v) \geqslant \alpha\|v\|_{H^1(]0,\,1[)}^2.$$

(5) *(1 point)*
La continuité de L : pour tout $v \in H^1(]0,\, 1[)$

$$|L(v)| = |\int_0^1 f(x)v(x)dx + v(0)| \leqslant \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + |v(0)| \leqslant \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1(]0,\,1[)} + c_1\|v\|_{H^1(]0,\,1[)}.$$

Donc

$$|L(v)| \leqslant (\|f\|_{L^2} + c_1)\,\|v\|_{H^1(]0,\,1[)}.$$

Par conséquent, L e

Toute les conditions du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées ; par conséquent le problème (P) possède une solution faible unique u dans $H^1(]0,\, 1[)$.