السنة الجامعية 2021\2022

جامعة الوادي

كلية العلوم الدقيقة (قسم الرياضيات)

تصحيح إمتحان الدورة العادية في التحليل 4

المستوى : ثانية رياضيات

التمرين الأول:

1. • f قابل للمفاضلة عند $a \in U$ ⇐ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ موجودة مهما يكن $i = 1, ..., n$.

• $f \in C^1(U)$ ⇔ $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ موجودة و مستمرة على U مهما يكن $i = 1, ..., n$.

2. إذا كان f مستمر على المستطيل المتراص $R = [a, b] \times [c, d]$ فإنّ f قابل للمكاملة على R و لدينا

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)dy\Big)dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy.$$

3. إذا كان D و U مفتوحين من $\mathbb{R}^2$ ، f قابل للمكاملة على D و $h : U \subset [0, +\infty[\times[0, 2\pi[\to D,\ (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ تفاتشاكل فإنّ

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_U f(r\cos\theta, r\sin\theta)\underbrace{|\det(Jh(r,\theta))|}_{=r}drd\theta.$$

التمرين الثاني:

نكتب $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq -x\}$. من كون $f(x, y) = y^2 e^{x^2}$ مستمر على D فإنّ f قابل للمكاملة على D و لدينا

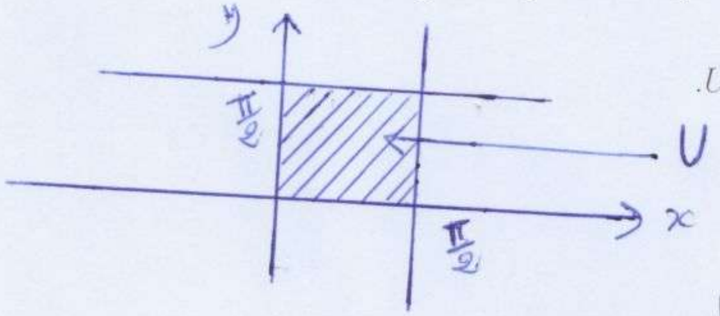
$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_{-1}^0 e^{x^2}\Big(\int_0^{-x} y^2dy\Big)dx = -\frac{1}{3}\int_{-1}^0 x^3e^{x^2}dx$$

$$= -\frac{1}{6}\int_1^0 te^tdt = -\frac{1}{6}\int_1^0 t(e^t)'dt = -\frac{1}{6}\Big([te^t]_1^0 - \int_1^0 e^tdt\Big) = \frac{1}{6}$$

و ذلك بإستعمال تغيير المتغير $t = x^2$ و التكامل بالتجزئة.

التمرين الثالث:

1. رسم $U =]0, \frac{\pi}{2}[\times]0, \frac{\pi}{2}[$.



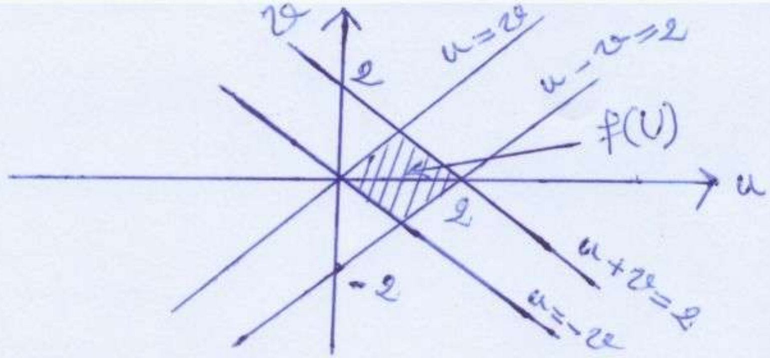
2. تعيين $f(U)$. لدينا

$$(u, v) \in f(U) \Leftrightarrow \exists(x, y) \in U : \ \ (u, v) = (\sin x + \cos y, \sin x - \cos y)$$

$$\Leftrightarrow \exists(x, y) \in U : \ \ 0 < \sin x = \frac{u+v}{2} < 1,\ 0 < \cos y = \frac{u-v}{2} < 1 \Leftrightarrow (u, v) \in V$$

حيث $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / 0 < u + v < 2, 0 < u - v < 2\}$. إذن $f(U) = V$.

سم $f(U)$.



3. لدينا U و V مفتوحين من $\mathbb{R}^2$. التطبيق f تقابل من U في V لأنّ x و y معينين بكيفية وحيدة في المجال $]0, \frac{\pi}{2}[$ (أنظر السؤال 2.) مما ينتج $f^{-1} : V \mapsto U, (u,v) \mapsto (\arcsin(\frac{u+v}{2}), \arccos(\frac{u-v}{2}))$. لما كان $f \in C^\infty(U)$ و $f^{-1} \in C^\infty(V)$ ، نستنتج من التعريف أنّ f تفاتشاكل من الصنف C^∞ من U في V (يمكن أيضا تطبيق نظرية العكس الشامل).