Université Echahid Hamma Lakhdar
Faculté des Sciences Exacts
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2021/2022
Module : Semi-groupes
Niveau : 1 Année Master

« Examen de Semi-groupes »

Nom et Prénom : .... **Groupe** :......... **Durée** : 60 min

1 . Montrer que si $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu. Alors, $(e^{-\lambda t}T(t))_{t\geq 0}$ est aussi un semi-groupe uniformément continu, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. **(6pts)**

On pose : $G(t) = e^{-\lambda t} T(t)$, $t \geq 0$

a) $G(0) = e^{0} T(0) = I$.

b) $\forall t, s \geq 0$; $G(t+s)$

$= e^{-\lambda(t+s)} T(t+s)$

$= (e^{-\lambda t} T(t))(e^{-\lambda s} T(s))$

$= G(t) G(s)$. D'où $(G(t))_{t\geq 0}$ un s.g

* On a

$\|G(t) - I\| = \|e^{-\lambda t} T(t) - I\|$

$= \|e^{-\lambda t} T(t) - e^{-\lambda t} I + e^{-\lambda t} I - I\|$

$= \|e^{-\lambda t}(T(t) - I) + (e^{-\lambda t} - 1) I\|$

$\leq e^{-R(\lambda)t} \underbrace{\|T(t) - I\|}_{\to 0} + \underbrace{|e^{-\lambda t} - 1|}_{\to 0}$

D'où $\lim_{t \to 0^+} \|G(t) - I\| = 0$.

2 . Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0- semi-groupe différentiable de générateur infinitésimal A.

Montrer que $T^{(n)}(t) = \left[AT\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (Indication: $T^{(n)}(t) = A^n T(t) = T(t)A^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$). **(6pts)**

* Pour $n = 1$, on sait que

$\frac{dT(t)x}{dt} = AT(t)x = T(t)Ax$, $\forall x \in D(A)$. D'où le résultat pour $n = 1$.

* Soit $t \geq s$, on a

$T^{(n+1)}(t) = \left(AT\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$

$= T(t-s)\left[AT\left(\frac{s}{n}\right)\right]^n$.

D'où

(*) $T^{(n+1)} = AT(t-s)\left[AT\left(\frac{s}{n}\right)\right]^n$

En substituant $s = \frac{n}{n+1}$

dans (*) on obtient le résultat pour $n+1$.

3. On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t) + 2\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t) = 0 \\ v(x,0) = \cos x \end{cases}$$

où $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

i) Donner la forme abstrait de ce problème. **(3pts)**

On pose $u(t) = v(x,t)$.

D'où $\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) + 2\frac{\partial v}{\partial x}(x,t) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = -2\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)$

$\Rightarrow \begin{cases} u'(t) = A\,u(t), \ t > 0 \\ u(0) = \cos x \end{cases}$

où $A = -2\frac{d}{dx}$

avec le domaine

$D(A) = H^1(\mathbb{R})$

$= \{u \in L^2(\mathbb{R}),\ u' \in L^2(\mathbb{R})\}$

ii) Chercher les solutions dans l'espace $X = L^2(\mathbb{R})$. **(3pts)**

Comme A est le g i d'un G.S.G défini sur $X = L^2(\mathbb{R})$ par:

$T(t)f(x) = f(x-2t), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0.$

Alors,

$v(x,t) = T(t)f(x)$

$= f(x-2t)$

$\Rightarrow \boxed{v(x,t) = \cos(x-2t)}$

Remarque: 2pts pour toute réponse organisation.

BONNE CHANCE