جامعة الشهيد حمة لخضر بالوادي — كلية العلوم الدقيقة

قـــســـم الريـــاضيـــات — السنـــة الثانيـــة

مـــــاي 2022 — اختبار في تطبيقات الرياضيات في العلوم الأخرى — ساعـــة

الاسم و اللقب: ....

الفوج: ....

التمرين الأول: 06 نقاط

1- يقوم مصنع بإنتاج نوعين من المنتجات (بسكويت-قوفريط)
يحتاج كل من المنتجين الى ساعة عمل في الآلة ويستوعب السوق وحدتين من المنتج الاول و 4 من النوع الثاني .
لإتمام عملية الانتاج لا بد من استخدام الالة ووقتها المتاح على الاكثر 20 ساعة و يستوعب السوق 60 وحدة على الاكثر من النوعين.
اذا علمت ان الربح المحقق من النوع الاول 5 دينار بينما الربح في النوع الثاني 6 دينار.
- صغ نموذج برمجة خطية مناسب للمسألة من اجل تعظيم الربح.

$Z = 5x + 6y$ دالة الهدف

حيث x عدد وحدات المنتج 1

y عدد وحدات المنتج 2

القيود

$$\begin{cases} x+y \le 20 \\ 2x+4y \le 60 \\ x \ge 0 \ ; \ y \ge 0 \end{cases}$$

عدم السلبية

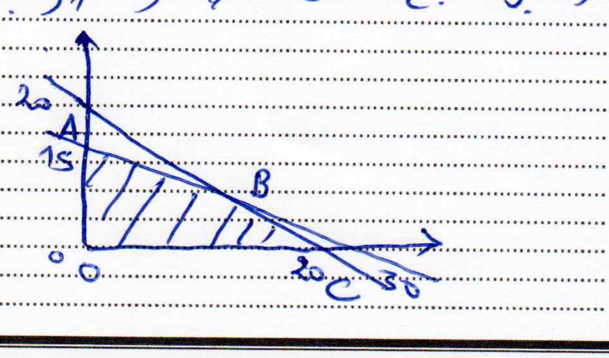
2- حل مسألة البرمجة الخطية الاتية بيانيا:

$$\begin{cases} \max(z) = 5x+6y \\ x+y \le 20 \\ 2x+4y \le 60 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

نرسم كل المستقيمين

$$\begin{cases} x+y = 20 \\ 2x+4y = 60 \end{cases}$$

ونعتبر الربع الأول $x \ge 0$ و $y \ge 0$ نجد



نعتبر رؤوس الرباعي OABC
وبالتعويض في دالة الهدف:

P	(0,0)	(15,0)	(10,10)	(20,0)
Z	0	90	110	100

وعليه الحل الأمثل

$(x,y) = (10,10)$

التمرين الثاني: 6 نقاط

في نظام التشفير RSA نستعمل المفتاح العام $(e,n)=(3,187)$

1- شفر العدد m=15

2- اذا علمت ان دالة اولر $\varphi(n)=160$

أ- اوجد تحليلا للعدد n(عين قيمتي كل من p , q)

ب- اوجد المفتاح الخاص d.

1/ تشفير العدد m

$C = m^3\ [187] \Rightarrow C = 15^3\ [187]$

$\Rightarrow C = 9$

2/ تحديد q , p

$n = p.q$ و $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$

$= pq-(p+q)+1$

$\Rightarrow p+q = n-\varphi(n)+1$

وعليه

$$\begin{cases} p.q = 187 \\ p+q = 28 \end{cases}$$

نحل المعادلة

$x^2-28x+187=0$

نجد:

$p = 11$ و $q = 17$

3) تعيين d :

$3 \cdot d = 1\ [160] \Rightarrow d = 3\ [160]$

$\Rightarrow d = -53\ [160] \Rightarrow d = 107$

تطبيق خوارزمية اقليدس

التمرين الثالث: 8 نقاط

لتكن $(u_n)_{n\in N}$ المتتالية العددية المعرفة كالآتي:

-1
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

-1 من اجل كل عدد طبيعي n برهن ان $\frac{3}{2} \le u_n \le 2$

بالتراجع :

أ) $n = 0 \quad \frac{3}{2} \le u_0 = 2 \le 2$

ب) نفرض صحة $P(n)$ ونثبت صحة $P(n+1)$

$\frac{3}{2} \le u_n \le 2$

$\frac{1}{2} \le \frac{1}{u_n} \le \frac{2}{3}$

$\frac{3}{2} \le 1 + \frac{1}{u_n} \le \frac{5}{3} \le 2$

وعليه فرض التراجع محقق

-2 نضع

$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.العدد الذهبي

بين انه من اجل كل عدد طبيعي n:

$|u_{n+1} - \varphi| \le \frac{4}{9}|u_n - \varphi|$ ....

ليكن $n \in \mathbb{N}$ لدينا: تحقق

$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$

$|u_{n+1} - \varphi| = \left|1 + \frac{1}{u_n} - 1 - \frac{1}{\varphi}\right|$

$= \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\varphi}\right| = \frac{|u_n - \varphi|}{\varphi u_n}$

$\le \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} |u_n - \varphi|$

$\le \frac{4}{9} |u_n - \varphi|$

3..- استنتج انه

من اجل كل عدد طبيعي n: $|u_n - \varphi| \le \left(\frac{4}{9}\right)^n$

*-استنتج تقارب و نهاية المتتالية (u_n)

ملاحظة: $u_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ ... حيث (F_n) متتالية فيبوناتشي :

بالتراجع :

أ) $n = 0$

$|u_0 - \varphi| = \left|2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \le 1$

ب) نفرض صحة $P(n)$ ونثبت صحة $P(n+1)$

$n \ge 0$

$0 \le |u_{n+1} - \varphi| \le \frac{4}{9}|u_n - \varphi|$

$\le \frac{4}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$

* لدينا: $0 \le \frac{4}{9} \le 1$

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_{n+1} - \varphi| = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \varphi$