التصحيح النموذجي لاختبار فيزياء الإحصاء الكمية ، 1 ماستر

1) عدد الجسيمات الكلي هو N، في حالة ما يكون عدد الجسيمات في المستوى ϵ_1 هو n_1 و في ϵ_2 هو n_2. مع شرط $n_1 + n_2 = N$.

بما أن $E(n_1, n_2) = n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2$

و $n_2 = N - n_1$

$$E(n_1, n_2) = n_1 \epsilon_1 + (N - n_1) \epsilon_2$$

وبما أن القيم الممكنة التي يمكن أن تأخذها n_1 هي عدد الجسيمات في المستوى ϵ_1، والذي يمكن أن يكون إما فارغا أو به جسيم واحد أو ... إلى غاية N جسيم $\Leftarrow$

$$E_n = n \epsilon_1 + (N - n) \epsilon_2 \quad , \quad n = 0, 1, \dots N$$

هي مستويات الطاقة الممكنة للنظام.

2) من أجل حالة الطاقة E_n يكون عدد الجسيمات في المستوى ϵ_1 هو n و $N-n$ في المستوى ϵ_2.

وبما أن الجسيمات قابلة للتمييز فإنه يمكن تبديل الجسيمات بين المستويين والحصول على حالات جديدة لنفس الطاقة، وعليه فإن كل مستوى طاقة E_n يكون منحل بعدد التبديلات المختلفة والذي يساوي

$$\frac{N!}{(N-n)!\, n!} = \frac{\text{عدد التبديلات الكلية}}{\text{عدد التبديلات داخل نفس المستوى}}$$

$$g_n = \frac{N!}{(N-n)!\,n!}$$ <3

$$Z = \sum \frac{N!}{(N-n)!\,n!} e^{-\beta E_n}$$

$$= \sum \frac{N!}{(N-n)!\,n!} e^{-\beta(n\epsilon_1 + (N-n)\epsilon_2)}$$

$$= \sum \frac{N!}{(N-n)!\,n!} \left(e^{-\beta\epsilon_1}\right)^n \left(e^{-\beta\epsilon_2}\right)^{N-n}$$

$$= \left(e^{-\beta\epsilon_1} + e^{-\beta\epsilon_2}\right)^N$$

* الطاقة المتوسطة :

$$E = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -N \frac{\partial}{\partial\beta} \frac{\cancel{\ln}(e^{-\beta\epsilon_1} + e^{-\beta\epsilon_2})}{e^{-\beta\epsilon_1} + e^{-\beta\epsilon_2}}$$

$$= \frac{+N\left(\epsilon_1 e^{-\beta\epsilon_1} + \epsilon_2 e^{-\beta\epsilon_2}\right)}{e^{-\beta\epsilon_1} + e^{-\beta\epsilon_2}}$$

* درجة الحرارة المرتفعة $\beta \to 0$

$$e^{-\beta\epsilon_1} \sim 1 , \quad e^{-\beta\epsilon_2} \sim 1$$

$$E = N\frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{2}$$

* درجة الحرارة المنخفضة $\beta \to \infty$

نفترض أن $\epsilon_1 < \epsilon_2$ (ليكن افتراض الأساس)

$$E = N \frac{\left(\epsilon_1 e^{-\beta\epsilon_1} + \epsilon_2 e^{-\beta\epsilon_2}\right)}{e^{-\beta\epsilon_1} + e^{-\beta\epsilon_2}}$$

$$= \frac{N e^{-\beta\epsilon_2}\left(\epsilon_1 e^{-\beta(\epsilon_1-\epsilon_2)} + \epsilon_2\right)}{\cancel{N} e^{-\beta\epsilon_2}\left(e^{-\beta(\epsilon_1-\epsilon_2)} + 1\right)}$$

$$= N \frac{\left(\epsilon_1 e^{\beta\Delta\epsilon} + \epsilon_2\right)}{e^{\beta\Delta\epsilon} + 1}, \quad \Delta\epsilon = \epsilon_2 - \epsilon_1 > 0$$

$$\beta \to \infty, \quad e^{\beta\Delta\epsilon} \to \infty$$

$$E \underset{\beta\to\infty}{\approx} N\epsilon_1$$

جميع الجسيمات تنزل إلى المستوى الأول

4> الأنتروبي

$$S = \frac{E-F}{T} = E/T + k \ln Z$$

$$= \frac{N\left(\epsilon_1 e^{-\beta\epsilon_1} + \epsilon_2 e^{-\beta\epsilon_2}\right)}{T\left(e^{-\beta\epsilon_1} + e^{-\beta\epsilon_2}\right)} + k \ln\left(e^{-\beta\epsilon_1} + e^{-\beta\epsilon_2}\right)^N$$

$$= N\left[\frac{1}{T} \frac{\left(\epsilon_1 e^{-\beta\epsilon_1} + \epsilon_2 e^{-\beta\epsilon_2}\right)}{e^{-\beta\epsilon_1} + e^{-\beta\epsilon_2}} + k \ln\left(e^{-\beta\epsilon_1} + e^{-\beta\epsilon_2}\right)\right]$$

درجات الحرارة المرتفعة $\beta \to 0$.

$$E = N\left(\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}\right)$$

$$k \ln\left(e^{-\beta\epsilon_1} + e^{-\beta\epsilon_2}\right) \sim k \ln(1+1) = k \ln 2$$

$$E/T .$$

$$S \underset{\beta\to 0}{\sim} N\Big[\underbrace{\frac{\epsilon_1+\epsilon_2}{T}}_{\to 0} + k\ln 2\Big] \simeq Nk\ln 2 .$$

• دراسة الحالة عندما $\beta \to \infty$

$$E = N\epsilon_1/T$$

$$\ln\left(e^{-\beta\epsilon_1} + e^{-\beta\epsilon_2}\right) \underset{\beta\to\infty}{=} e^{-\beta\epsilon_1}$$

$$= \ln e^{-\beta\epsilon_1}\left(1 + e^{-\beta(\epsilon_2-\epsilon_1)}\right)$$

$$= -\beta\epsilon_1 + \ln\big(1 + \underbrace{e^{-\beta(\epsilon_2-\epsilon_1)}}_{\to 0}\big) \simeq \ln(1) = 0$$

$$S = N\left(\frac{\cancel{N}\epsilon_1}{T} - \cancel{N}k\epsilon_1\beta\right)$$

$$= N\left(\frac{\epsilon_1}{T} - \epsilon_1/T\right) = 0$$

$$S \underset{T\to 0}{\to} 0 .$$