الإجابة النموذجية

التمرين الأول: 1) a) $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot \frac{1}{5n+1}$

- سلسلة عددية متناوبة.
- المتتالية (a_n) حيث $a_n=\frac{1}{5n+1}$ موجبة
و متناقصة لأن: $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{5n+6}-\frac{1}{5n+1}=$ 0,5

$$=\frac{-5}{(5n+6)(5n+1)}<0 \ (\forall n\in\mathbb{N}).$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{5n+1}=0$$

حسب معيار لايبنتز $\sum_{n\geq 0} U_n$ متقاربة.

- لدينا من جهة أخرى: $V_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{20n^2}$

اذا $\sum_{n\geq 0} V_n$ متقاربة 0,5 لأن: $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ متقاربة (سلسلة ريمان $\alpha=2>1$) متقاربة.

b) $U_{2n}+U_{2n+1}=\frac{1}{10n+1}+\frac{-1}{10n+6}$ 1

$$=\frac{10n+6-10n-1}{(10n+1)(10n+6)}=\frac{5}{(10n+1)(10n+6)}=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n=\sum_{n=0}^{\infty}(U_{2n}+U_{2n+1})=\sum_{n=0}^{\infty} U_n$$ 1

لأن: مجموع الحدود ذات المراتب الزوجية $=\sum U_{2n}$

" " " " الفردية $=\sum U_{2n+1}$

2) من أجل: $t\geq 1$ نجد $0<\frac{e^{-t}}{t\sqrt{t}}\leq\frac{e^{-1}}{t\sqrt{t}}\leq\frac{1}{t\sqrt{t}}$

اذا: $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t\sqrt{t}}dt$ متقارب 1

لأن: $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t}}=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{3/2}}$ تكامل ريمان

متقارب عند $+\infty$ (لأن: $\alpha=\frac{3}{2}>1$)

بل ويمكن حسابه: $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{3/2}}=\left[-2\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\right]_1^{+\infty}=0+2=2$

- من جهة أخرى:

$$\forall t>0: \quad \frac{e^t}{t}>\frac{1}{t}>0$$

a) $\int_0^1\frac{1}{t}dt$ متباعد في جوار 0^+ (عند 0^+) 1

تكامل ريمان عند 0: $\alpha=1$.

- منه $\int_0^1\frac{e^t}{t}dt$ متباعد.

التمرين 2: 1) من أجل $x=0$:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(0)=\lim_{n\to+\infty} 0=0$$ 1

ومن أجل $x\neq 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=\lim_{n\to+\infty} n\cdot\sin\left(\frac{x}{n+1}\right)=+\infty\cdot 0 \ (\text{ح.ع.ت})$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{nx}{n+1}\cdot\frac{\sin\left(\frac{x}{n+1}\right)}{\frac{x}{n+1}}=$$ 2

$$=x\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{x}{n+1}\right)}{\frac{x}{n+1}}$$

$$=x\cdot 1\cdot 1=x$$

اذا $f_n\xrightarrow{C.S} f$ حيث $f(x)=x$.

2) لدينا: $f_n(x_n)=n\cdot\sin\frac{\pi}{2}=n$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-x|$$ 2

$$\geq|x_n-f_n(x_n)|=\left|\frac{(n+1)\pi}{2}-n\right|=n\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+\frac{\pi}{2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$$

ومنه التقارب ليس منتظما.

تمرين 3: 1)

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2+(n+1)-3}{(n+1)!}\times\frac{n!}{n^2+n-3}$$ 1,5

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=1\cdot 0=0$$

1,5 اذا نصف قطر التقارب هو: $+\infty$ ومجال التقارب $=\mathbb{R}$

2)

$$S(x)=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n}_{S_1}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{n!}}_{S_2}-3\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}_{S_3}$$

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$=x\cdot e^x,\quad S_3=e^x$$ 3

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^n}{(n-1)!}=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=$$

$$=x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{x^n}{n!}=x\left(S_2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)=x^2\cdot e^x+e^x\cdot x$$

اذا:

$$S=(x^2+x)e^x+xe^x-3e^x$$

$$=(x^2+2x-3)e^x$$ 1

3)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+n-3}{n!\sqrt{3}^n}=\left(\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{9}{3}\right)e^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-8}{3}e^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$