جامعة الشهيد حمه لخضر الوادي

كلية العلوم الدقيقة	**المدة: 01 ساعة**	قسم الرياضيات
السنة الثانية رياضيات	**امتحان الدورة العادية لمقياس التحليل المركب**	2022/05/25
الاسم:	اللقب:	الفوج:

التمرين الأول(07):

a) 1) ليكن التابع الحقيقي $U(x,y)=x^2-y^2+e^x\cos y$، بين أنه توافقي

2) عين التابع V حيث التابع $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ هلمورفي

3) عبر عن $f(z)$ بدلالة z.

b) احسب نهاية التابع $g(z)$ حيث $g(z)=\dfrac{e^{2z}+1}{e^z+i}$ عندما $z\to-\dfrac{i\pi}{2}$

الاجابة:..

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

التمرين الثاني(06):

ا) ليكن التابع المركب $h(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$ ـ حدد النقاطة الشاذة وما نوعه

ـ أعط نشر لوران التابع h في النقطة الشاذة، و ما قيمة الراسب للتابع h ؟ .

ب) احسب التكامل $\int_{\gamma}\left(z^2+z\bar{z}\right)dz$, حيث

$$\gamma=\left\{z\in C:|z|\le 1,0\le\theta\le\pi\right\}$$

الاجابة:..

التمرين الثالث(07):

احسب التكامل التالي: $\displaystyle\oint_{c:|z|=r} \frac{\sin \pi z dz}{(z-1)^2}$

1) بطريقتين مختلفتين في حالة $r \geq 1$

2) في حالة $r < 1$ ، ما قيمة التكامل؟

الاجابة:

جامعة الشهيد حمه لخضر الوادي

كلية العلوم الدقيقة | المدة: 01 ساعة | قسم الرياضيات

السنة الثانية رياضيات

تصحيح امتحان الدورة العادية لمقياس التحليل المركب

2022/05/25

التمرين الأول(07):

الاجابة:

a) 1) ليكن التابع الحقيقي $U(x,y)=x^2-y^2+e^x\cos y$، بين أنه توافقي

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=2x+e^x\cos y\Rightarrow\frac{\partial^2U(x,y)}{\partial x^2}=2+e^x\cos y....*$$ 05........

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=-2y-e^x\sin y\Rightarrow\frac{\partial^2U(x,y)}{\partial y^2}=-2-e^x\cos y.....**$$ 0.5.........

من * و ** نستنتج أن $\frac{\partial^2U(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U(x,y)}{\partial y^2}=0$ أي $U(x,y)$ توافقي..............0.5

2) عين التابع V حيث التابع $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ هلمورفي

$f(z)$ هلمورفي $\Leftarrow$ $\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}$ و $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}$ 0.5

و مما سبق $U(x,y)$ توافقي فهو يقبل مرافق توافقي و بالتالي من المساوة

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}2x+e^x\cos y\Rightarrow V(x,y)=2xy+e^x\sin y+\varphi(x)$$ ..1

من جهة ثانية من $\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}=2y+e^x\sin y+\varphi'(x)$ و من المساواة

$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}$ نستنتج أن $-2y-e^x\sin y=-2y-e^x\sin y-\varphi'(x)$......0.5

أي أن $\varphi'(x)=0\Leftarrow\varphi(x)=C$ أي ثابت و منه $V(x,y)=2xy+e^x\sin y+C$ ....0.5.

3) عبر عن $f(z)$ بدلالة z

مما سبق نستنتج أن $f(z)=x^2-y^2+e^x\cos y+i2xy+ie^x\sin y+iC$ 0.5

أي $f(z)=z^2+e^z+k$ حيث $k=iC$ 0.5

b) احسب نهاية التابع $g(z)$ حيث $g(z)=\frac{e^{2z}+1}{e^z+i}$ عندما $z\to-\frac{i\pi}{2}$

$$\lim_{z\to-i\pi/2}g(z)=\lim_{z\to-i\pi/2}\frac{e^{2z}+1}{e^z+i}=\frac{0}{0}$$ 1

واضح أن $e^{2z}+1=(e^z-i)(e^z+i)$ 0.5

و بالتالي $\lim_{z\to-i\pi/2}g(z)=\lim_{z\to-i\pi/2}(e^z-i)=-2i$ 0.5

التمرين الثاني(06):

الاجابة: ا) ليكن التابع المركب $h(z)=z^3e^{1/z}$ - حدد النقاطة الشاذة وما نوعه

النقطة الشاذة للتابع h هي $z=0$ ، نوعها من أجل $z=x=0$ لدينا

$$\lim_{z=x \xrightarrow{>} 0} h(z)=\lim_{z=x \xrightarrow{>} 0} z^3e^{1/z}=+\infty \text{ لكن } \lim_{z=x \xrightarrow{<} 0} h(z)=\lim_{z=x \xrightarrow{<} 0} z^3e^{1/z}=0$$

أي أن للتابع h ليست له نهاية عندما $z \to 0$ ، و بالتالي النقطة الشاذة أساسية 1

- أعط نشر لوران التابع h في النقطة الشاذة، و ما قيمة الراسب للتابع h ؟

نعلم بأن نشر تايلور لـ e^z في جوار النقطة $z=0$ هو $e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$ 0.25

ومنه نشر تايلور لـ $e^{1/z}$ هو $e^{1/z}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1/z)^n}{n!}$ 0.25

و بالتالي .... $z^3e^{1/z}=z^3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1/z)^n}{n!}=z^3+z^2+\frac{z}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!z}+\frac{1}{5!z^2}+...+\frac{1}{n!z^{n-3}}$ ...0.5

و هذا يمثل نشر لوران للدالة h في جوار $z=0$ و الراسب هو معامل الحد $\frac{1}{z}$ و هو $\frac{1}{24}$ 1

ب) احسب التكامل $\int_\gamma \left(z^2+z\bar{z}\right)dz$, حيث $\gamma=\{z\in C:|z|\le 1, 0\le\theta\le\pi\}$

نضع $z=re^{i\theta}=e^{i\theta} \Leftarrow dz=ie^{i\theta}d\theta$ 1

و بالتالي $\int_\gamma \left(z^2+z\bar{z}\right)dz=\int_0^\pi \left(e^{2i\theta}+1\right)ie^{i\theta}d\theta=\left[\frac{e^{3i\theta}}{3}+e^{i\theta}\right]_0^\pi=-\frac{8}{3}$ 2

التمرين الثالث(07):

الاجابة:

1) بطريقتين مختلفتين في حالة $r\ge 1$

ا) باستخدام صيغة كوشي و النقطة الشاذة هي $z=1$ ومنه

$$\oint_{c:|z|=r}\frac{\sin \pi z dz}{(z-1)^2}=\frac{2\pi i}{1}(\sin \pi z)'_{z=1}=2i\pi^2\cos\pi=-2i\pi^2 \text{ ....2.5}$$

ب) باستخدام نظرية الرواسب ، النقطة الشاذة $z=1$ قطب من الرتبة الثانية ا

$$\oint_{c:|z|=r}\frac{\sin \pi z dz}{(z-1)^2}=\lim_{z\to 1}\frac{2\pi i}{1}(\sin \pi z)'=2i\pi^2\cos\pi=-2i\pi^2 \text{ ....2.5}$$

2) في حالة $r<1$ ، ما قيمة التكامل؟ النقطة الشاذة خارج المنطقة المعطاة و بالتالي الدالة تحليلية و المنحنى مغلق حسب نظرية كوشي التكامل معدوم..2