تمرين 1

a. 2,5

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 \leq 0\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 , g(x,y) \leq 0\}$$

$$= g^{-1}(]-\infty, 0])$$

حيث $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \to y - x^2$

كون g مستمر فهو قيوس ، إذن E قيوسة

لأنها صورة عكسية لمجموعة قيوسة $]-\infty,0]$
بواسطة تطبيق قيوس

b. الجواب: لا. لأن $]-\infty,0]$ مغلق إذن 2,5
E مغلقة من $\mathbb{R}^2$ كونها صورة عكسية لمغلق
وفق تطبيق مستمر.

تمرين 2:

a. (f_n) متتالية توابع مستمرة، ذلك لكونها متتالية توابع مستمرة

(f_n) متتالية متزايدة، لأنه من أجل كل $x\in[0,1]$ لدينا

$$x^{n+1} \le x^n \Rightarrow \frac{1}{1+x^n} \le \frac{1}{1+x^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f_n(x) \le f_{n+1}(x) \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

إذن (f_n) تحقق شروط نظرية بيبو ليفي

b. حسب a.

$$\lim \int_{[0,1]} f_n\,dx = \int_{[0,1]} \lim f_n\,dx$$

$$= \int_{[0,1]} 2022\,dx = 2022$$

تمرين 3:

a. يمكنه استعمال الخلف أو أي طريقة تؤدي إلى المطلوب

ليكن $n,m \ge 1$ كيفيان بحيث أن

$$[n, n+\frac{1}{2^n}] \cap [m, m+\frac{1}{2^m}] \ne \emptyset \quad (n\ne m)$$

العكس

إذن يوجد على الأقل عنصر ليكن x :

$$x\in[n, n+\frac{1}{2^n}] \wedge x\in[m, m+\frac{1}{2^m}]$$

$$n \le x \le n+\frac{1}{2^n} \wedge m \le x \le m+\frac{1}{2^m}$$

نجري عملية الطرح

$$n-m-\frac{1}{2^m} \le 0 \le n-m+\frac{1}{2^n}$$

ومنه

$$n-m \le \frac{1}{2^m} \wedge m-n \le \frac{1}{2^n}$$

ومنه

$$-\frac{1}{2^m} \le n-m \le \frac{1}{2m}$$

ومنه

$$n-m=0$$

ومنه $n=m$ تناقض.

$$\lambda(K) = \sum_{n\geq 1} \lambda\left(\left[n, n+\frac{1}{2^n}\right]\right)$$ .b

$$= \sum_{n\geq 1}\left(n+\frac{1}{2^n}-n\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

تمرين 4

a. نبين أن $\forall n \geq 1 \quad A_n \subset A_{n+1}$

$$x \in A_n \iff \varphi(x) > \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) > \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow x \in A_{n+1}$$

(و.م)

.b

$$\lim_n \delta_0(A_n) = \delta_0\left(\lim_n A_n\right)$$

$$= \delta_0\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)$$ لأن (A_n) متزايدة

$$= \delta_0\left(\{\varphi > 0\}\right)$$ (لاحظ في الأسفل)

$$= \delta_0(\mathbb{R})$$ كون φ موجب تماما

$$= 1$$

توضيح

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1}\left\{\varphi > \frac{1}{n}\right\} = \bigcup_{n\geq 1}\left\{\varphi \in \left]\frac{1}{n}, +\infty\right[\right\}$$

$$= \left\{\varphi \in \bigcup_{n\geq 1}\left]\frac{1}{n}, +\infty\right[\right\}$$

$$= \left\{\varphi \in]0, +\infty[\right\} = \{\varphi > 0\}$$

$$= \mathbb{R}$$