الحل النموذجي لاختبار الطبولوجيا

التمرين الأول: ② × 3

1) تعريفا: ملاصقة مجموعة هي تقاطع كل المغلقات المحتوية عليها
وبالأحرى الأصح هو: هي أصغر مغلق يحتوي في A وليس العكس

2) بما أن B_f مغلق فإن:

$$B(x,\varepsilon) \subseteq B_f(x,\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \overline{B(x,\varepsilon)} \subseteq \overline{B_f(x,\varepsilon)} = B_f(x,\varepsilon)$$

3) إذا كان الـ (E,d) متراص، فإنه من كل متتالية (x_n) من عناصر E يمكن استخراج متتالية جزئية (x_{n_k}) متقاربة نحو x من E.
إذن: إذا كانت (x_n) متتالية كوشية من E فإنه من أجل $n \geq n_0$:

$$d(x_n,x) \leq d(x_n,x_{n_k}) + d(x_{n_k},x)$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ومنه (x_n) متقاربة، إذن الـ (E,d) تام.

التمرين الثاني:

$E = \mathbb{R}$

$$\tau = \{]-\infty,a[, a\in\mathbb{R}\} \cup \mathbb{R} \cup \{\phi\}$$

1) لتكن $\mathcal{F}$ مجموعة المغلقات في (E,τ) إذن:

$$F \in \mathcal{F} \Leftrightarrow C_{\mathbb{R}} F \in \tau$$

إذن

(2) .... $\mathcal{F} = \{ [a,+\infty[, a\in\mathbb{R}\} \cup \mathbb{R} \cup \{\phi\}$

2)

(0.5) .... $\mathring{A} = \mathring{\overline{\{1,2\}}} = \phi$

لأنه لا يوجد مفتوح يحتوي في A ماعدا المجموعة الخالية

(1) .... $\overline{A} = [1,+\infty[\in \mathcal{F}$

(0.5) .... $\mathring{B} = \mathring{\overline{]1,2[}} = \phi$

(1) .... $\overline{B} = [1,+\infty[$

3) ليكن x، y من $\mathbb{R}$ حيث $x \neq y$.

إنّ أي مفتوح يشمل x يكون $\mathbb{R}$ أو من الشكل : $O_x =]-\infty, a[$
حيث $x \le a$

(1) ... نفس الشيء بالنسبة إلى y : $O_y =]-\infty, b[$ و $y \le b$

لكن $O_x \cap O_y =]-\infty,a[\cap]-\infty,b[\neq \emptyset$ .... (1)

وبالتالي (E,τ) غير منفصل.

التمرين الثالث :

1) $E =]0,+\infty[$ $\delta(x,y) = |\ln x - \ln y|$

$$\delta(x,y) = 0 \iff \ln x = \ln y$$
$$\iff x = y$$

(3) ....

$$\delta(x,y) = |\ln x - \ln y| = |\ln y - \ln x|$$
$$= \delta(x,y)$$

من أجل x، y، z من $\mathbb{R}_+^*$

$$\delta(x,y) = |\ln x - \ln z + \ln z - \ln y|$$
$$\le |\ln x - \ln z| + |\ln z - \ln y|$$
$$= \delta(x,z) + \delta(y,z)$$

2) نبرهن بالخلف، نفرض أن $(n)_{n\ge1}$ متقاربة إذن :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_0 \quad |\ln(n) - y| < \varepsilon$$

إذن المتتالية (y_n) المعرفة بـ $y_n = \ln(n)$

(2) .... متقاربة في $\mathbb{R}$ المزود بالمسافة الاعتيادية،

لكن نعلم أن $\lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$ (أي متباعدة)

وهذا تناقض إذن $(n)_{n\ge0}$ متباعدة وليست كوشية أيضا

لأنه إذا كانت كوشية فالمتتالية $(\ln n)_{n\ge1}$ كوشية في $\mathbb{R}$ المزود بالمسافة الاعتيادية وهذا غير ممكن.

3) لتكن (x_n) كوشية في (E,δ) إذن :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n,m \ge n_0, |\ln x_n - \ln x_m| < \varepsilon$$

(2) .... أي أن : $y_n = \ln x_n$ كوشية في الاعتيادي

وبالتالي هي متقاربة أي

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_1 \quad |y_n - y| < \varepsilon$$

أي $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_1 \quad |\ln x_n - \ln x| < \varepsilon$

حيث $y = \ln x$ (التطبيق $\ln x$ تقابلي من $]0,+\infty[$ إلى $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل y من $\mathbb{R}$ يوجد x من $]0,+\infty[$