Université Echahid Hamma Lakhdar ElOued

Faculté des sciences exactes

Département des mathématiques

1 Master

Correction d'Examen d'analyse numérique

Exo 1 : Le problème discret s'écrit comme :

$$\begin{cases} -\dfrac{(U_{i+1}-2U_i+U_{i-1})}{h^2} = f_i \ , \ i=1,\dots,N \\ U_0 = U_{N+1} = 0 \end{cases}$$

03

La consistance du schéma numérique :

on a d'abord

$$U_i'' = \frac{U_{i+1}-2U_i+U_{i-1}}{h^2} - \frac{h^2}{4!}\left(U^{(4)}(\xi_1)+U^{(4)}(\xi_2)\right)$$

alors, $R_i(h) = L\bar{U} - L_h U_h = -U_i'' - \left(-\dfrac{(U_{i+1}-2U_i+U_{i-1})}{h^2}\right)$

$$= \frac{h^2}{4!}\left(U^{(4)}(\xi_1)+U^{(4)}(\xi_2)\right)$$

03

$$\max_i |R_i(h)| \leq \frac{1}{12}\|U^{(4)}\|_\infty h^2$$

donc le schéma est consistant d'ordre 2.

Exo 2 :

1) L'équation (2) s'écrit par :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

$\Delta = 0^2 - 4(1)(0) = 0 \Rightarrow$ l'éq (2) est parabolique 02

2) d'après (3), on obtient

$$U_j^{n+1} = \frac{\Delta t}{(\Delta X)^2}\left(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n\right) - \frac{\Delta t}{\Delta X}\left(U_j^n - U_{j-1}^n\right) + U_j^n .$$

si on a posé $r_1 = \dfrac{\Delta t}{(\Delta X)^2}$, $r_2 = \dfrac{\Delta t}{\Delta X}$, alors on trouve

$$U_j^{n+1} = (1-2r_1-r_2)U_j^n + r_1 U_{j+1}^n + (r_1+r_2)U_{j-1}^n .$$

04

donc : $\alpha = 1-2r_1-r_2$, $\beta = r_1$, $\gamma = r_1+r_2$.

$$U_1^{n+1} = \alpha U_1^n + \beta U_2^n + \gamma \cancel{U_0^n}$$

$$U_2^{n+1} = \alpha U_2^n + \beta U_3^n + \gamma U_1^n$$

$$U_3^{n+1} = \alpha U_3^n + \beta U_4^n + \gamma U_2^n$$

$$\vdots$$

$$U_M^{n+1} = \alpha U_M^n + \beta \cancel{U_{M+1}^n} + \gamma U_{M-1}^n$$

$$\Rightarrow U^{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & 0 \\ \gamma & \alpha & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & & \gamma & \alpha \end{pmatrix} U^n$$

donc $U^{n+1} = C U^n$, C est une matrice tridiagonale alors le schéma est stable en $\|\cdot\|_\infty$ ssi $\|C\|_\infty \leq 1$.

$$C = \begin{pmatrix} 1-(2r_1+r_2) & r_1 & & 0 \\ r_1+r_2 & 1-(2r_1+r_2) & r_1 & \\ & \ddots & \ddots & r_1 \\ 0 & & r_1+r_2 & 1-(2r_1+r_2) \end{pmatrix}$$

Sous la condition $2r_1+r_2 \leq 1$, on a $\|C\|_\infty = 1-(2r_1+r_2)+r_1+r_1+r_2$
$= 1$ 06

alors la condition de C.F.L est $\boxed{2r_1+r_2 \leq 1}$

$$\|U^{n+1}\|_\infty = \|CU^n\|_\infty \leq \|C\|_\infty \|U^n\|_\infty \leq \|U^n\|_\infty \leq \cdots \leq \|U^0\|_\infty$$

donc le schéma (3) est stable en $\|\cdot\|_\infty$.

$$2r_1+r_2 \leq 1 \iff \frac{2\Delta t}{(\Delta X)^2} + \frac{\Delta t}{\Delta X} \leq 1 \iff \frac{2\Delta t + \Delta t \Delta X}{(\Delta X)^2} \leq 1$$

$$\iff 2\Delta t + \Delta t \Delta X \leq (\Delta X)^2$$

$$\iff (\Delta X)^2 - \Delta t \Delta X - 2\Delta t \geq 0, \quad \Delta = (\Delta t)^2 + 8\Delta t$$

$\Delta X_1 = \dfrac{\Delta t - \sqrt{\Delta}}{2} < 0$ مرفوض

$\Delta X_2 = \dfrac{\Delta t + \sqrt{\Delta}}{2} > 0$ مقبول

donc, $2r_1+r_2 \leq 1 \iff \Delta X \geq \dfrac{\Delta t + \sqrt{(\Delta t)^2 + 8\Delta t}}{2}$ 02