قسم الرياضيات	جامعة الشهيد حمه لخضر - الوادي	مقياس: المعادلات التفاضلية
السنة الثالثة رياضيات	كلية العلوم الدقيقة	السنة الجامعية: 2022/2021

التصحيح النموذجي لامتحان الدورة العادية للسداسي الخامس   المدة: ساعة

التمرين الأول:

1) حل المعادلة (E): $y''-2y'+y=0$

1 معادلتها المميزة: $r^2-2r+1=0$

1 والتي تقبل حلاً مضاعفا $r_0=1$

2 فالحل العام للمعادلة (E): $y=(c_1+c_2x)e^x,\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

1,5 2) بوضع $\begin{cases}y_1=y\\y_2=y'\end{cases}$ نجد $\begin{cases}y_1'=y'\\y_2'=y''\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}y_1'=y_2\\y_2'=-y+2y'\end{cases}$

0,5 فنحصل على الجملة المطلوبة: $\begin{cases}y_1'=y_2\\y_2'=-y_1+2y_2\end{cases}$

حل هذه الجملة: يمكن كتابتها على الشكل المصفوفي:

$Y'=AY$ حيث $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$، $Y'=\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\end{pmatrix}$ و $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}$

تعيين القيم الذاتية لـ A: $(\det(A-\lambda I)=0)\Leftrightarrow$ (λ قيمة ذاتية لـ A)

1 أي $\begin{vmatrix}-\lambda&1\\-1&2-\lambda\end{vmatrix}=0$ فنستنتج $\lambda^2-2\lambda+1=0$ أي $(\lambda-1)^2=0$

1 ومنه A تقبل قيمة ذاتية 1 مضاعفة ورتبة تضاعفها (2)

0,5 حسب مبرهنة كايلي - هاملتون فإن $(A-I)^2=0$

1 وبالتالي: $e^{tA}=e^{t(A-I+I)}=e^{tI}\,e^{t(A-I)}$

$=e^t\left(I+t(A-I)\right)$

1 $=e^t\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}\right]$

$=e^t\begin{pmatrix}1-t&t\\-t&1+t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-t)e^t&te^t\\-te^t&(1+t)e^t\end{pmatrix}$

حل الجملة: $Y=e^{tA}C=e^t\begin{pmatrix}1-t&t\\-t&1+t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$

1 $=\begin{pmatrix}(c_1+(c_2-c_1)t)e^t\\(c_2+(c_2-c_1)t)e^t\end{pmatrix},\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

$\begin{cases} y_1 = (c_1 + (c_2-c_1)t)e^t \\ y_2 = (c_2 + (c_2-c_1)t)e^t \end{cases}$ ، $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ بمعنى

0,5 وحسب الوضع السابق، لدينا $y_1 = y$ أي $y = (\alpha+\beta t)e^t$

(مع α و β ثابتان حقيقيان) والذي يمثل حل المعادلة (E).

التمرين الثاني:

1) المعادلة (E_1) هي لأولر المتجانسة، معادلتها المميزة:

1 تكتب: $r^2 + (-2-1)r + 2 = 0$ مع $y = x^r$

أي $r^2 - 3r + 2 = 0$

1 والتي تقبل حلين مختلفين حقيقيين $r_1 = 1$; $r_2 = 2$

1 حل المعادلة (E_1): $y = c_1 x + c_2 x^2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2) لدينا: $y'(x) = \sqrt{2}\, x^2 y\left(\frac{1}{x}\right)$

1 فإن: $y''(x) = 2\sqrt{2}\, x\, y\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{2}\, x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right) y'\left(\frac{1}{x}\right)$

$= 2\sqrt{2}\, x\, y\left(\frac{1}{x}\right) - \sqrt{2}\sqrt{2} \times \frac{1}{x^2}\, y(x)$

0,5 $= 2\sqrt{2}\, x\, y\left(\frac{1}{x}\right) - 2 \times \frac{1}{x^2}\, y(x)$

1 ومنه: $x^2 y''(x) = 2x\, y'(x) - 2\, y(x)$

أي: $x^2 y'' - 2xy + 2y = 0$ فنحصل على المعادلة (E_2)

0,5 وحسب السؤال 1. فإن حل المعادلة (E_2) هو: $y = c_1 x + c_2 x^2$

وما دامت المعادلة (E_2) من الرتبة الأولى فحلها يحوي على ثابت واحد.

0,5 فلدينا من جهة: $y'(x) = c_1 + 2c_2 x \quad \ldots(1)$

ومن جهة أخرى: $y\left(\frac{1}{x}\right) = c_1\left(\frac{1}{x}\right) + c_2\left(\frac{1}{x^2}\right)$

0,5 نجد: $\sqrt{2}\, x^2 y\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{2}\, c_1 x + \sqrt{2}\, c_2 \quad \ldots(2)$

0,5 وبمطابقة (1) و(2) ينتج: $\begin{cases} c_1 = \sqrt{2}\, c_2 \\ 2c_2 = \sqrt{2}\, c_1 \end{cases}$ نجد $c_1 = \sqrt{2}\, c_2$

فالدوال التي تحقق المعادلة (E_2) هي:

0,5 $y = \alpha\left(\sqrt{2}\, x + x^2\right)$, $\alpha = c_2 \in \mathbb{R}$