جـامـعة الــوادي	كـلـيـة العـــلوم والدقيقة
السنة الثانية (SM) فيزياء	2022/2021
التصحيح المفصل لامتحان الدورة العادية في مقياس المعادلات التفاضلية والسلاسل	

التمرين الأول (07) : 1) ادرس تقارب كل من السلسلتين المعرفتين بحديهما العامين كالتالي:

$$V_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^a}\right) \cong \frac{(-1)^n}{n^a}$$ و بالتالي $$|V_n| = \frac{1}{n^a}$$ 1

إذا كان $a > 1$ السلسلة متقاربة مطلقا في متقاربة 0.5

و إذا كان $a \le 1$ السلسلة ليست متقاربة مطلقا لدراسة تقاربها نستعمل نظرية لبنز أي 1

$$|V_{n+1}| \le |V_n| \Rightarrow \frac{1}{(n+1)^a} \le \frac{1}{n^a}$$ و $$\lim_{n\to+\infty}|V_n| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^a} = 0$$ و بالتالي السلسلة متقاربة

، $$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$ و منه السلسلة متقاربة حسب كوشي........1.5

2) نعتبر السلسلة الصحيحة التالية: $$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

نعلم بأن $$R = \lim_{n\to+\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$$ 1

و بالتالي $\forall \in \left]-\infty,+\infty\right[$ دالة المجموع للسلسلة هي $$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!} = e^{-x^2}$$ 1

و منه النشر على المنطقة $\left]-\infty,\infty\right[$ للدالة هو $$F: x \to \int_0^x e^{-t^2}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$ 1

التمرين الثاني (08) :

1) لتكن الصفيحة $D = \{(x,y) \in IR^2 / 0 \le x \le \pi/2,., 2x/\pi \le y \le \sin x\}$

- احسب $(B/A, C/A)$ احداثيي مركز العطالة للصفيحة D حيث

1.. $$A = \iint_D dxdy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_{2x/\pi}^{\sin x} dy\right)dx = \int_0^{\pi/2}\left(\sin x - \frac{2x}{\pi}\right)dx = \left[-\cos x - \frac{x^2}{\pi}\right]_0^{\pi/2} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

1.5.................... $$B = \iint_D x dxdy = \int_0^{\pi/2} x\left(\int_{2x/\pi}^{\sin x} dy\right)dx = \int_0^{\pi/2} x\left(\sin x - \frac{2x}{\pi}\right)dx$$

$$=\left[-x\cos x+\sin x-\frac{2x^3}{3\pi}\right]_0^{\pi/2}=1-\frac{\pi^2}{12}$$

1.5......... $$C=\iint_D ydxdy=\int_0^{\pi/2}\left(\int_{2x/\pi}^{\sin x}ydy\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2 x-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}-\frac{4x^3}{3\pi^2}\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi^2}{12}=\frac{\pi}{24}$$

و منه إحداثيا مركز العطالة للصفيحة هما $\left(\frac{12-\pi^2}{3(4-\pi)},\frac{\pi}{6(4-\pi)}\right)$ 1

2) لدينا $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^7dx}{x^{16}+1}\cong\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^9}dx$ و هو متقارب 1

من جهة أخرى ليكن $]-a,a[\subset]-\infty,\infty[$ و بالتالي:

1.5... $$\int_{-a}^{a}\frac{x^7dx}{x^{16}+1}\leq\int_{-a}^{a}\frac{dx}{x^9}=\left[\frac{-1}{8x^8}\right]_{-a}^{a}=\frac{-1}{4a^8}\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^7}{x^{16}+1}dx\leq\lim_{a\to+\infty}\frac{-1}{4a^8}=0$$

أي $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^7dx}{x^{16}+1}=0$ و منه فهو متقارب. 0.5

التمرين الثالث(05):

لدينا $V=\left\{(x,y,z)\in IR^3/x,y,z\geq 0,x^2+y^2\leq x,,,z\leq\sqrt{1-(x^2+y^2)}\right\}$

1.5..... $V'=\left\{(r,\theta,z)\in IR^3/0\leq\theta\leq\pi/2,,,0\leq r\leq\cos\theta,,,0\leq z\leq\sqrt{1-r^2}\right\}$

و منه

1.5.............. $$I=4\iiint_V dxdydz=4\iiint_{V'}rdrd\theta dz=4\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos\theta}r\left(\int_0^{\sqrt{1-r^2}}dz\right)dr\right)d\theta$$

1..................... $$=4\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos\theta}r\sqrt{1-r^2}dr\right)d\theta=\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}\left(1-\left(1-\cos^2\theta\right)^{3/2}\right)d\theta$$

1..... $$=\frac{2\pi}{3}-\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\theta)\sin\theta d\theta=\frac{2\pi}{3}-\left[\frac{4}{3}\left(\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\right]_0^{\pi/2}=\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{9}$$