الحل النموذجي للامتحان:

ت 01 : لدينا:

$$\begin{cases} V_x = A\omega\cos(\omega t) \\ V_y = A\omega\sin(\omega t) \end{cases}$$

أ- كتابة عبارة السرعة وطويلتها:

1,5p —— $\vec V = V_x\vec i + V_y\vec j = A\omega\cos(\omega t)\vec i + A\omega\sin(\omega t)\vec j$

1p —— $|\vec V| = \sqrt{V_x^2+V_y^2} = \sqrt{A^2\omega^2\cos^2(\omega t) + A^2\omega^2\sin^2(\omega t)}$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec V| = A\omega}$$

ب- كتابة عبارة شعاع التسارع وطويلته:

1,5p —— $\vec a = \frac{d\vec V}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t)\vec i + A\omega^2\cos(\omega t)\vec j$

$|\vec a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{A^2\omega^4\sin^2(\omega t) + A^2\omega^4\cos^2(\omega t)}$

1p —— $|\vec a| = \sqrt{A^2\omega^4(\underbrace{\sin^2(\omega t)+\cos^2(\omega t)}_{1})} = \boxed{A\omega^2}$

ج- إيجاد مركبات شعاع التسارع في الإحداثيات المنحنية:

1,5p —— $a_T = \frac{d|\vec V|}{dt} = \frac{d}{dt}(A\omega) = 0 \Rightarrow \boxed{a_T = 0}$

ولدينا:

$|\vec a|_{Tot}^2 = a_T^2 + a_N^2 \Rightarrow a_N^2 = |a|_{Tot}^2 - a_T^2 = |a|_{Tot}^2 - 0$

$\Rightarrow a_N = \sqrt{A^2\omega^4} = A\omega^2$

1,5p —— $\Rightarrow \boxed{a_N = A\omega^2}$

د- شعاعي الوحدة $\vec e_T$ و $\vec e_N$: لدينا:

$\vec a = a_x\vec i + a_y\vec j = \overset{0}{a_T}\vec e_T + a_N\vec e_N$

0,5p —— $\Rightarrow \vec e_N = \frac{a_x\vec i + a_y\vec j}{a_N} = \boxed{-\sin(\omega t)\vec i + \cos(\omega t)\vec j}$

وبما أن: $\vec e_T \cdot \vec e_N = 0$

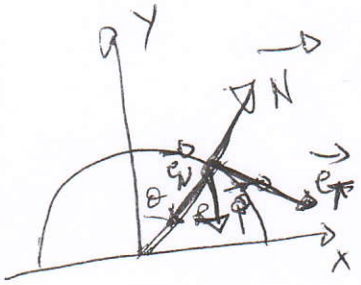
0,5p —— $\boxed{\vec e_T = \cos(\omega t)\vec i + \sin(\omega t)\vec j}$

نصف قطر الانحناء: لدينا:

$a_N = \frac{|V|^2}{R} \Rightarrow R = \frac{|V|^2}{a_N}$

1p —— $\Rightarrow \boxed{R = \frac{A^2\omega^2}{A\omega^2} = A}$

ت 02:



$\frac{9}{p}$

1) مجموع القوى المؤثرة هي: قوة الثقل $\vec{P}$ و قوة رد الفعل $\vec{N}$.

2) ايجاد عبارة رد الفعل:

بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك:

3p — $\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$

بالإسقاط على المحور $\vec{e}_T$ و المحور $\vec{e}_N$ نجد:

1p — $\begin{cases} P\sin\theta = ma_T = m\dfrac{dV}{dt} & \text{—— (1)} \\ -N + P\cos\theta = ma_N = m\dfrac{V^2}{R} & \text{—— (2)} \end{cases}$

وفق $\vec{e}_T$
وفق $\vec{e}_N$

وبما أن الحركة دائرية فإن:

$V = R\omega = R\dfrac{d\theta}{dt}$

وبضرب المعادلة (1) في $\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)$ نجد:

1p — $mg\sin\theta\, d\theta = m\dfrac{dV}{dt}\dfrac{d\theta}{dt} = m\dfrac{dV}{dt}\dfrac{V}{R}$

$\Rightarrow g\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{dV}{dt}\dfrac{V}{R}.$

بتكامل الطرفين:

1p — $\int_0^\theta g\sin\theta\, d\theta = \dfrac{1}{R}\int_0^V V\,dV \Rightarrow g\left[-\cos\theta\right]_0^\theta = \dfrac{1}{R}\left[\dfrac{V^2}{2}\right]_0^V$

$\Rightarrow g\left[1-\cos\theta\right] = \dfrac{V^2}{2R} \Rightarrow V^2 = 2Rg\left[1-\cos\theta\right]$

وبالتعويض في المعادلة (2) نجد:

1p — $\boxed{N = mg(3\cos\theta - 2)}$

3) ايجاد الزاوية أثناء المغادرة: $N = 0$

1p — $\Rightarrow mg(3\cos\theta - 2) = 0 \Rightarrow \theta = \arccos\dfrac{2}{3}$