جامعة الشهيد حمّه لخضر بالوادي
كليّة العلوم الدقيقة
قسم الرياضيات

السنة الجامعيّة:2022/2021
المستوى: أولى رياضيات واعلام آلي

التّصحيح النموذجي لامتحان الدورة العاديّة لمقياس التحليل-II -

التمرين الأول: (6 ن)

-1

الدالة f تقبل نشر ماك-لوران لاغرانج من الرتبة 2 إذا كانت من الصنف C^2 و f'' قابلة للاشتقاق عند 0

1 ن

عبارة النشر: من أجل x يوجد c محصور تماما بين 0 و x حيث:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3$$

1 ن

-2 هل وجود النشر المحدود ⇐ وجود نشر تايلور-يونغ

0.5 ن لاهذه القضيّة خاطئة لأنّ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

1 ن

$$f(x)=\begin{cases}x^3\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$$

تقبل نشرا محدودا في جوار الصفر من الرتبة 2 و لكنّها ليست من الصنف C^2 أي أنّها لا تقبل نشر تايلور-يونغ من الرتبة 2 0.5 ن

أو أي مثال مضاد صحيح.

-3

0.5 ن **لا شرط الاستمرار ليس ضروري لقابلية المكاملة** حسب ريمان لدالة f على مجال $[a,b]$:

فمثلا الدالة المعرّفة على المجال $[0,2]$ بالشكل:

1 ن

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 2 & 1\le x<2\end{cases}$$

ليست مستمرة عند 1

و لكنها قابلة للمكاملة على المجال $[0,2]$ لأنّ:

0.5 ن

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$

$$=\int_0^1 1dx+\int_1^2 2dx=1+2=3$$

أو أي مثال مضاد صحيح.

التمرين الثاني: (6 ن)

نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ بالعبارة:

$$f(x)=\frac{3}{x^3+1}$$

-1 تعيّين الأعداد الحقيقيّة A,B,C حيث:

$$f(x)=\frac{A}{(x+1)}+\frac{Bx+C}{(x^2-x+1)}$$ بعد الحساب نجد

3 x0.5 ن

$$A=1 \qquad B=-1 \qquad C=2$$

-2 حساب : $\int f(x)dx$

0.5 ن

$$\int f(x)dx=\int\frac{dx}{x+1}+\underbrace{\int\frac{-x+2}{(x^2-x+1)}dx}_{J}$$

0.5 ن

$$\int\frac{dx}{x+1}=\ln|x+1|+c_1$$

$$J=\int\frac{-x+2}{(x^2-x+1)}dx$$

2 ن

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)+c_2$$

وعليه:

0.5 ن

$$\int f(x)dx=$$

$$\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)+c$$

-3 حساب: $I=\int_0^1 f(x)dx$ 1 ن

$$I=\int_0^1 f(x)dx$$

$$=F(1)-F(0)$$

$$=\ln 2-\frac{1}{2}\ln 1+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\left[\ln 1-\frac{1}{2}\ln 1+\sqrt{3}\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$=\ln 2+2\sqrt{3}\frac{\pi}{6} \qquad \left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}} = \ln 2+\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$$

التمرين الثالث: (4 ن)

1- النشرين المحدودين التاليين في جوار 0:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

2x 0.5 ن

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

2- حساب النشر المحدود من الرتبة 4 في جوار 0 للدّالة: $f(x) = \ln(\cos(x))$

1 ن

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(\cos(x)) \\ &= \ln\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) \\ &= -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^2}{2} + o(x^4) \end{aligned}$$

و عليه:

0.5 ن

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

3- حساب $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1 - f(x)}{x^4}$

لدينا في جوار0:

1 ن

$$\frac{\cos(x) - 1 - f(x)}{x^4} = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 1 - \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}\right) + o(x^4)}{x^4} = \frac{\frac{3x^4}{24} + o(x^4)}{x^4}$$

ومنه:

0.5 ن

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1 - f(x)}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{3x^4}{24} + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{3}{24} + \frac{o(x^4)}{x^4}\right) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

التمرين الرابع: (4 ن)

1- مكاملة المعادلة التفاضليّة :

$$y' + y = \sin x \cdots\cdots\cdots\cdots (E)$$

نعلم أنّ (E) خطيّة من الرتبة الأولى حلّها العام من الشكل:

0.5 ن

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

حيث $y_h(x)$ حلّ عام للمتجانسة و $y_p(x)$ حلّ خاص لـ (E)

- لحساب $y_h(x)$ بفصل المتغيرات و المكاملة نجد:

0.5 ن

$$y_h(x) = Ce^{-\int dx} = Ce^{-x} \qquad C \in \mathbb{R}$$

- و لحساب $y_p(x)$ **نستعمل طريقة تغيير الثابت** هو من الشكل:

0.5 ن

$$y_p(x) = C(x)e^{-x}$$

بالاشتقاق و التعويض في (E) نجد:

$$C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} = \sin x$$

أي أنّ: $C'(x) = \sin(x)e^x$

و بالتالي: $C(x) = \int \sin(x)e^x dx$

و بالمكاملة بالتجزئة مرتين نجد:

1 ن

$$C(x) = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x$$

و منه :

0.5 ن

$$y_p(x) = C(x)e^{-x} = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$$

و عليه الحلّ العام لـ (E) هو:

$$y(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) \qquad C \in \mathbb{R}$$

3- حساب الحلّ الوحيد لـ (E) الذى يحقق: $y(\pi) = 0$

بالتعويض في الحلّ العام نجد:

0.5 ن

$$0 = y(\pi) = Ce^{-\pi} + \frac{1}{2}(\sin\pi - \cos\pi)$$

$$0 = Ce^{-\pi} + \frac{1}{2} \Rightarrow C = -\frac{e^{\pi}}{2}$$

عليه الحلّ المطلوب هو:

0.5 ن

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{\pi - x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$$