Université Echahid Hamma Lakhdar
Faculté des sciences exactes
Département des mathématiques

El Oued, le 24-05-2022
1ère Master académique
Durée : soixante minute

Correction du contrôle du 2ème semestre de modélisation

Exercice1: (05 points)

Répondre par vrai ou faux aux expressions suivantes :

1) L'indice franc apparaît une fois dans le monôme. vrai ……… (01)
2) Le produit tensoriel de deux tenseurs est un tenseur. faux……… (01)
3) Tout tenseur est égal à la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique. vrai (01)
4) Le partie déviateur d'un tenseur est un tenseur isotrope de trace nulle. faux……… (01)
5) Le produit doublement contacté d'un tenseur symétrique et un autre antisymétrique est nul. vrai (01)

Exercice 2: (7.5 points)

On considère un mouvement d'une particule défini dans la base orthonormé $B=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ par sa représentation lagrangienne :

$$\begin{cases} x_1 = X_1\cos(\pi t) - X_2\sin(\pi t) \\ x_2 = X_1\sin(\pi t) + X_2\cos(\pi t) \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

1. Que représente l'équation de la trajectoire de la particule initialement à $X=(1,1,0)$.

$$\begin{cases} x_1 = \cos(\pi t) - \sin(\pi t) \\ x_2 = \sin(\pi t) + \cos(\pi t) \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = 1 - 2\cos(\pi t)\sin(\pi t) \\ x_2^2 = 1 + 2\cos(\pi t)\sin(\pi t) \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2 = 2)\wedge(x_3 = 0) \;\ldots\ldots (1.5)$$

La trajectoire est le cercle dont l'équation de centre $O(0,0,0)$ et de rayon $r=\sqrt{2}$ située dans le plan d'une équation $x_3=0$

2. Déterminer le vecteur de position $\vec{u}$ et celui de la vitesse $\vec{v}$.

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = x_1 - X_1 = X_1\cos(\pi t) - X_2\sin(\pi t) - X_1 \\ u_2 = x_2 - X_2 = X_1\sin(\pi t) + X_2\cos(\pi t) - X_2 \\ u_3 = x_3 - X_3 = X_3 - X_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = X_1(\cos(\pi t) - 1) - X_2\sin(\pi t) \\ u_2 = X_1\sin(\pi t) + X_2(\cos(\pi t) - 1) \\ u_3 = 0 \end{cases} \ldots (1.5)$$

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = -\pi X_1\sin(\pi t) - \pi X_2\cos(\pi t) \\ v_2 = \pi X_1\cos\pi t - \pi X_2\sin(\pi t) \\ v_3 = 0 \end{cases} \;\ldots\ldots (01)$$

3. Calculer le tenseur gradient de la transformation F .

Le terme général de la matrice de la transformation F est $F_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}$, donc on a

$$[F] = \begin{pmatrix} \cos(\pi t) & -\sin(\pi t) & 0 \\ \sin(\pi t) & \cos(\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ldots\ldots (02)$$

4. Calculer le tenseur des dilatations C.

Pour le tenseur des dilatations, on a $C = F^T F \Rightarrow C_{ij} = F_{pi} F_{pj}$, donc :

$$[F] = \begin{pmatrix} \cos^2(\pi t)+\sin^2(\pi t) & \cos(\pi t)\sin(\pi t)-\cos(\pi t)\sin(\pi t) & 0 \\ \cos(\pi t)\sin(\pi t)-\cos(\omega t)\sin(\pi t) & \cos^2(\omega t)+\sin^2(\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [I] \ \ldots (1.5)$$

Exercice 3: (08 points)

En un point donné d'un milieu continu, le tenseur des contraintes est donné par ce qui suit :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Décomposer le tenseur σ en partie sphérique S et en partie déviatorique D.

Partie sphérique S et partie déviatorique D.

$[\sigma] = [S] + [D]$ avec $[S] = \frac{\text{trace}(\sigma)}{3}[I]$ et comme $\text{trace}(\sigma) = 12 + 18 + 6 = 36$ donc

$$[S_{ij}] = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \text{ et } [D_{ij}] = [\sigma_{ij}] - [S_{ij}] \Rightarrow [D_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & -6 \end{pmatrix} \ldots\ldots (1.5) = (0.5) + (0.5) + (0.5)$$

2. Déterminer les contraintes principales du tenseur déviatorique D.

Les contraintes principales sont données par :

$$\det[D - \lambda I] = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 6-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda\left((6-\lambda)(6+\lambda)+16\right) = 0 \ \ldots\ldots (1.5)$$

$$\Leftrightarrow \lambda(52-\lambda^2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda = -2\sqrt{13}) \vee (\lambda = 0) \vee (\lambda = 2\sqrt{13})$$

3. Déduire les contraintes principales du tenseur σ.

$$[\sigma] = [S] + [D] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 12 + 2\sqrt{13} \\ \sigma_2 = 12 \\ \sigma_3 = 12 - 2\sqrt{13} \end{cases} \ldots (01)$$

4. Calculer (σ_n, τ) les contraintes normale et tangentiel du vecteur contrainte $\vec{T}$ dans la direction de la première bissectrice du plan (Ox_1, Ox_3).

Soit $\vec{n}$ est la première bissectrice du plan (Ox_1, Ox_3) donc $\vec{n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\{\vec{T}\} = [\sigma_{ij}]\{\vec{n}\} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 12 \\ 4 \\ 6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{Bmatrix}, \|\vec{T}\|^2 = (6\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 98 \ (1.5)$$

La composante normale de cette contrainte est :

$$\sigma_n = \vec{T} \cdot \vec{n} = 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} \times 0 + 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6 + 3 = 9 \ \ldots (01)$$

La composante tangentielle est :

$$\tau = \sqrt{\|\vec{T}\|^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{98 - 9^2} = \sqrt{98 - 81} = \sqrt{17} \ \ldots (01)$$