جامعة الشهيد حمة لخضر بالوادي كلية العلوم الدقيقة

قسم الرياضيات السنة الثانية

المدة: ساعة مقياس الاحتمالات

الاسم و اللقب: الفوج:

و قيمة المرء ما قد كان يحسنه وللرجال على الافعال أسماء

أجب بوضوح وباختصار فالتحرير الجيد يؤخذ بعين الاعتبار

التمرين الأول:6.5ن

اقتطع 16 مسافرا تذاكر سفر في المحطة A حيث:

7 منهم يتوجهون نحو المحطة B بسعر 50 دينار للتذكرة الواحدة

5 منهم يتوجهون نحو المحطة C بسعر 60 دينار للتذكرة الواحدة

4 منهم يتوجهون نحو المحطة D بسعر 75 دينار للتذكرة الواحدة

1- نختار عشوائيا 3 من هؤلاء المسافرين

أ- احسب احتمالان يكون للمسافرين الثلاث اتجاهات مختلفة

ب- ما احتمال ان يكون اتجاه المسافرين نحو المحطة B علما انهم متجهين في نفس الاتجاه.

2- نختار عشوائيا مسافرا واحدا من المحطة

و ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل مسافر سعر تذكرته

أ- عين قانون احتمال المتغير العشوائي X

ب- احسب الامل الرياضياتي للمتغير العشوائي X

1/ أ) $P(V) = \dfrac{C_7^1 \times C_5^1 \times C_4^1}{C_{16}^3} = \dfrac{1}{4}$

ب) $P_E(F) = \dfrac{P(F \cap E)}{P(E)} = \dfrac{P(F)}{P(E)}$

$= \dfrac{C_7^3}{C_7^3 + C_5^3 + C_4^3} = \dfrac{5}{7}$

2°/

أ)

x_i	50	60	75	Σ
P_i	7/16	5/16	4/16	1

ب) $E(X) = \sum x_i \, P(X = x_i)$

$= 59,375$

التمرين الثاني:7ن

ليكن X المتغير العشوائي المستمر، دالة الكثافة f لقانون احتماله معرفة على المجال [1,2] بالعبارة

$$f(x) = k\frac{x + \ln x}{x^2}, k \in \mathbb{R}$$

1- حدد قيمة العدد الحقيقي الثابت k

2- أحسب $E(X)$

3- عين قانون المتغير العشوائي Y حيث : $Y = \ln X$

1°/ قيمة العدد الثابت k

f مستمرة وموجبة على $[1,2]$ من أجل $\alpha > 0$

$\int_1^2 f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \alpha \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}\right) dx = 1$

بالتجزئة

$\Leftrightarrow [\alpha \ln x]_1^2 + \alpha\left[\left(-\frac{1}{x}\ln x\right)\right]_1^2 - \left[\frac{1}{x}\right]_1^2 = 1$

$\Leftrightarrow \alpha \ln 2 + \alpha\left(-\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{2}{1 + \ln 2}$

2°/ $E(X) = \int_1^2 x f(x)\, dx = \alpha \int_1^2 \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) dx$

$= \alpha \left[x + \frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^2 = \alpha\left(1 + \frac{\ln^2 2}{2}\right)$

$E(X) = \dfrac{2 + (\ln 2)^2}{1 + \ln 2}$

3°/ $Y = \ln X \Rightarrow y = \ln x$

$\Rightarrow x = e^y$

$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = e^y$

$f_Y(y) = f_X(e^y)\, e^y$

$= \alpha\left(1 + \frac{y}{e^y}\right)$

$y \in [0, \ln 2]$

التمرين الثالث:6.5ن

تعريف: نسمي قانون احتمال منتظم للمتغير العشوائي المستمر X على المجال $[a,b]$من $\mathbb{R}$كل متغير دالة كثافة احتماله f تعطى بـ:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}\,; x \in [a,b] \\ 0\,; \text{خلافه} \end{cases}$$

1- عين دالة التوزيع F_X للمتغير العشوائي X

2- عين الدالة المميزة $\varphi_X(t)$ للمتغير العشوائي X

3- باستعمال قانون منتظم حل مايلي

في محطة للمسافرين تقلع حافلة كل 100 دقيقة ، يصل احد المسافرين صدفة الى المحطة

أحسب احتمال ان ينتظر هذا المسافر اكثر من 50 دقيقة كي يستقل الحافلة.

1°/ $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_a^x f(x)dx$

$$= \begin{cases} 0 & ; x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & ; x \in [a,b] \\ 1 & ; x \geq b \end{cases}$$

2°/ $\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_a^b e^{itx} f(x)dx$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{it} e^{itx}\right]_a^b$$

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{b-a}\left(\frac{e^{ibt} - e^{iat}}{it}\right)$$

3°/ $X \sim \mathcal{U}_{[0,100]}$

$f(x) = \dfrac{1}{100}$ $\quad x \in [0,100]$ ailleurs

$P(50 < X < 100) = \int_{50}^{100} f(x)dx$

$= \left[\dfrac{x}{100}\right]_{50}^{100} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$