

الإجابة النموذجية

الشعبة: رياضيات تطبيقية

التخصص: analyse mathématiques et application

المادة: مادة التخصص

Faculté : Sciences Exactes
Département : Mathématiques



كلية : العلوم الدقيقة
قسم : الرياضيات

مسابقة الدخول لدكتوراه الطور الثالث، ل م د 2021/2020
Concours d'accès au doctorat 3^e cycle, LMD 2020/2021

Spécialité :	تحليل رياضي وتطبيقاته / Analyse mathématique et ses applications	الاختصاص :
Variantes :	1	الخيار رقم :
Epreuve :	تحليل رياضي وتطبيقاته / Analyse mathématique et ses applications	اختبار :
Durée :	02 ساعة	المدة :
Date :	6/03/2021	التاريخ :
	Coefficient :	03
	Heure :	15:00
		المعامل :
		التوقيت :

Exercice 01 (07 points)

Soit $p \in [1; \infty[$. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{C})$, on définit

$$T : l^p(\mathbb{C}) \rightarrow l^p(\mathbb{C})$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (a_n u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

1. Vérifier que T est bien un endomorphisme continu de $l^p(\mathbb{C})$.
2. Montrer que T est compact si et seulement si $\lim a_n = 0$.
3. Les shifts à droite et à gauche sur $l^p(\mathbb{C})$ sont ils compacts ?

Exercice 02 (07 points)

Soit $E = C[0; 1]$ muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$. Pour tout $f \in E$, on définit l'opérateur S par

$$(Sf)(t) = \int_0^t K(t, s) f(s) ds,$$

où $K(t, s)$ est une fonction réelle continue sur $[0; 1] \times [0; 1]$.

1. Montrer que $S \in \mathcal{L}(E)$ (c.à.d. qu'il est linéaire continu à valeur dans E).
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et $t \in [0; 1]$, on a $|(S^n f)(t)| \leq \frac{(Mt)^n}{n!} \|f\|_\infty$,
où $M = \sup_{0 \leq s, t \leq 1} |K(s, t)|$. En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a $\|S^n\| \leq \frac{M^n}{n!}$.
3. Déterminer le spectre de S .

Exercice 03 (06 points)

Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \rightarrow X$ une application vérifiant

$$\forall (x, y) \in X \times X; x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

Soit $g : (X, d) \rightarrow (\mathbb{R}, | \cdot |)$ définie par $g(x) = d(x, f(x))$.

1. Montrer que g est continue.
2. Soit $x_0 \in X$ tel que $g(x_0) = \inf g(x)$
 - a- Vérifier l'existence du point x_0
 - b- Montrer que x_0 est un point fixe pour l'application f .

Corrigé Type Variant (1)

Ex n° 1 On note $\mu = (\mu_n)_n$, $a = (a_n)_n$ et pour $m \in \mathbb{N}$, $e_m = (0, 0, \dots, \underset{\downarrow m}{1}, 0, \dots)$

1) T est clairement linéaire et on a directement par définition de la norme ℓ^p , $\|T\mu\|_p \leq \|a\|_\infty \|\mu\|_p$ ce qui assure la continuité de T .

2) $a_n \rightarrow 0 \Rightarrow T$ compact, dans ce cas là, T est compact en tant que limite d'opérateurs de rangs finis. En effet, on définit T_N :

$\mu \mapsto (a_0\mu_0, a_1\mu_1, \dots, a_N\mu_N, 0, \dots)$, on de rangs finis, on vérifie que $T_N(\ell^p) \subseteq \text{Vect}(e_1, \dots, e_N)$ et pour tout μ dans la boule unité fermée de $\ell^p(\mathbb{Q})$, on a $\|(T - T_N)\mu\|_p \leq \sup_{n > N} |a_n| \rightarrow 0$, $N \rightarrow +\infty$ par hypothèse.

* T compact $\Rightarrow (a_n)_n \rightarrow 0$, on montre la contraposée, si $a \not\rightarrow 0$ alors on pourrait extraire une sous-suite $(a_{k(n)})_n$ vérifiant

$$\left\| \frac{e_{e(n)}}{a_{e(n)}} \right\| \leq \frac{1}{a} \Rightarrow e_{e(n)} = T\left(\frac{e_{e(n)}}{a_{e(n)}}\right) \in T(B_{1/a}).$$

où $B_{1/a}$ est la boule de $L^p(\mathbb{G})$.

3) on a $(e_n)_n$ sont dans la boule unité de $L^p(\mathbb{G})$.

Exercice II

$$(Sf)(t) = \int_0^t K(t,s) f(s) ds$$

1) S est linéaire (d'après la linéarité de l'intégrale)
Soit $t_0 \in [0,1]$, on a, $\forall t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} |(Sf)(t) - (Sf)(t_0)| &= \left| \int_0^t K(t,s) f(s) ds - \int_0^{t_0} K(t_0,s) f(s) ds \right| \\ &= \left| \int_0^{t_0} (K(t,s) - K(t_0,s)) f(s) ds + \int_{t_0}^t K(t,s) f(s) ds \right| \\ &\leq \|f\|_{\infty} \cdot \int_0^{t_0} |K(t,s) - K(t_0,s)| ds + \sup |K(t,s)| \|f\|_{\infty} |t - t_0| \end{aligned}$$

alors $(Sf)(t) \rightarrow (Sf)(t_0)$ qd $t \rightarrow t_0$, c'est-à-dire $Sf \in E = C[0,1]$
d'autre part $|(Sf)(t)| \leq \sup |K(t,s)| t \cdot \|f\|_{\infty}$ alors $\|Sf\| \leq \sup |K(t,s)|$

alors S est continue (borné), i.e. $S \in \mathcal{L}(E)$. Suite Ex(2)

2) $n \geq 1, t \in [0, 1]$. on démontre par récurrence que

$$|S^n f(t)| \leq \frac{M^n}{n!} \cdot t^n \cdot \|f\|_\infty.$$

propriété vraie pour $n=1$; supposons qu'elle est vraie pour n

$$\text{on a: } |S^{n+1} f(t)| = |S(S^n f)(t)| = \left| \int_0^t k(t,s) (S^n f)(s) ds \right| \\ \leq \int_0^t |k(t,s)| |S^n f(s)| ds$$

$$\text{Ex 2 Vol} \leq n \cdot \frac{M^n}{n!} \cdot \|f\|_\infty \int_0^t s^n ds = \frac{M^{n+1}}{n!} \cdot \|f\|_\infty \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} \cdot t^{n+1} \|f\|_\infty \quad \text{d'où la propriété est vraie}$$

pour tout $n \geq 1$.

d'après ce qui précède: $\|S^n\| \leq \frac{M^n}{n!}$. car $0 \leq t^n \leq 1$

$$3) \text{ D'après 2: } \sqrt[n]{\|S^n\|} \leq \frac{M}{\sqrt[n]{n!}}$$

on démontre que $\sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty$, car $e^n = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \geq \frac{n^n}{n!}$

et par suite $n! \geq \frac{n^n}{e^n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n$ alors $\sqrt[n]{n!} \geq \frac{n}{e}$

donc le rayon spectral de S , $r(S) = \lim \sqrt[n]{\|S^n\|}$

$$r(S) \leq \lim \frac{M}{\sqrt[n]{n!}} = 0 \quad \text{alors } \sigma(S) = \{0\}.$$

$$\text{Ex 3} \quad W(T) = \left\{ \frac{\langle Tx, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}, 0 \leq \|x\|, \|y\| \leq 1 \right\}$$

1) Pour $x, y \neq 0$ de H , on a

$$\left| \frac{\langle Tx, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \right| \leq \frac{\|Tx\| \cdot \|y\|}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\| \quad \text{d'où } \sup W(T) \leq \|T\|$$

D'autre part: pour $y = \frac{Tx}{\|Tx\|}$ ($x \neq 0$)

$$\left| \frac{\langle Tx, Tx \rangle}{\|x\| \|Tx\|} \right| \leq \frac{\|Tx\| \cdot \|Tx\|}{\|x\| \cdot \|Tx\|} = \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup W(T)$$

donc $\|T\| \leq \sup W(T)$ et finalement $\|T\| = \sup W(T)$

Ex 3: soit $x_0 \in X$, pour tout $x \in X$

1) $|g(x) - g(x_0)| = |d(x, f(x)) - d(x_0, f(x_0))|$

$$d(x, f(x)) \leq d(x, x_0) + d(x_0, f(x_0)) + d(f(x_0), f(x))$$

$$\text{donc } d(x, f(x)) - d(x_0, f(x_0)) \leq d(x, x_0) + d(f(x), f(x_0))$$

de même on trouve

Ex 3 $d(x_0, f(x_0)) - d(x, f(x)) \leq d(x, x_0) + d(f(x), f(x_0))$

Voilà

alors

$$|d(x, f(x)) - d(x_0, f(x_0))| \leq d(x, x_0) + d(f(x), f(x_0))$$

$$x \neq x_0 \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < d(x, x_0)$$

$$\text{alors } |d(x, f(x)) - d(x_0, f(x_0))| \leq 2 d(x, x_0)$$

donc g est uniformément continue.

et comme X est compact alors $\exists \epsilon_0 \in X$

$$\inf g(x) = g(x_0)$$

2) par l'absurde on suppose que $x_0 \neq f(x_0)$
 ~~$g(x_0) \neq 0$~~

$$\text{si } d(x_0, f(x_0)) \neq 0 \Rightarrow d(f(x_0), f^2(x_0)) \leq d(x_0, f(x_0)) = 0$$

Contradiction

2) $\omega(T) = \sup \{ |\langle Tx, x \rangle| : \|x\| = 1 \}$, il est évident $\omega(T) \leq \sup \|Tx\| = \|T\|$
 démontrons l'autre inégalité

$$2 |\langle Tx, y \rangle + \langle Ty, x \rangle| \leq |\langle T(x+y), x+y \rangle| + |\langle T(x-y), x-y \rangle|$$

$$\leq \|T(x+y)\| \|x+y\| + \|T(x-y)\| \|x-y\|$$

$$= \|x+y\|^2 |\langle T(\frac{x+y}{\|x+y\|}, \frac{x+y}{\|x+y\|}) \rangle| + \|x-y\|^2 |\langle T(\frac{x-y}{\|x-y\|}, \frac{x-y}{\|x-y\|}) \rangle|$$

$$\leq \omega(T) [\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2] = \omega(T) [2(\|x\|^2 + \|y\|^2)] = 4\omega(T)$$

alors : $|\langle Tx, y \rangle + \langle Ty, x \rangle| \leq 2\omega(T)$

en prenant dans cette inégalité : $y = \frac{Tx}{\|Tx\|}$ et T par T

($\|x\|=1$) on obtient : $\|Tx\| + \frac{1}{\|Tx\|} \langle T^2x, x \rangle \leq 2\omega(T)$

Si $\langle T^2x, x \rangle = |\langle T^2x, x \rangle| e^{i\theta}$ i.e. $d \leq e^{\frac{i\theta}{2}}$

en multipliant par $\|Tx\|$ le membre on obtient

$$\|Tx\|^2 + |\langle T^2x, x \rangle| \leq 2\omega(T) \cdot \|Tx\|$$

ce qui implique ~~pour~~ $\|x\|=1 \Rightarrow \|Tx\| \leq 2\omega(T)$

d'où $\|T\| \leq 2\omega(T)$.



Faculté :
Département :

Sciences Exactes
Mathématiques

العلوم الدقيقة
الرياضيات

كلية:
قسم:

مسابقة الدخول لدكتوراه الطور الثالث، ل م د 2021/2020
Concours d'accès au doctorat 3^e cycle, LMD 2020/2021

الاختصاص:	تحليل رياضي وتطبيقاته / Analyse mathématique et ses applications
الخيار رقم:	3
الاختبار:	تحليل رياضي وتطبيقاته / Analyse mathématique et ses applications
المعامل:	03
التوقيت:	15:00
المدة:	02 ساعة
Heure :	التاريخ:
Date :	6/03/2021

Exercice 01 (05 points)

Montrer que si $T \in \mathcal{L}(H)$ est normal, alors $\|T^2\| = \|T\|^2$

(Indication : vous pouvez commencer par le cas auto-adjoint qui se traite plus facilement)

Exercice 02 (07 points)

Soit $E = C[0; 1]$ l'espace de toutes les fonctions continues sur l'intervalle $[0; 1]$ à valeurs réelles, muni par les deux normes suivantes $\|u\|_\infty = \max_{t \in [0; 1]} |u(t)|$, $\|u\|_1 = \int_0^1 |u(t)| dt$.

- Montrer que l'application identique $I : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$ est une bijection continue et déterminer sa norme.
- Montrer que l'inverse I^{-1} de l'application identique I n'est pas continue.
(Vous pouvez utiliser la suite de fonctions $u_n(t) = t^n$).
- En déduire que E muni de la norme $\|\cdot\|_1$ n'est pas un espace de Banach.

Exercice 03 (08 points) :

Sur l'espace de Hilbert $H = L^2[-\pi; \pi]$, on considère l'opérateur intégral T qui à tout $x \in H$ associe la fonction définie par

$$(1) \quad (Tx)(t) = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(t-s)x(s) ds,$$

- Vérifier par calcul direct que $Tx \in H$ et que $\|T\| \leq \pi$.
- Calculer l'adjoint T^* de T .
- Démontrer que pour tout $x \in H$, la fonction Tx est deux fois dérivable et vérifie une équation différentielle qu'on précisera.
- Donner une expression explicite de Tx par deux façons différentes :
 - en utilisant la question 3,
 - par calcul direct.

(05 p^{ts})

Exo 1: $T \in \mathcal{L}(H)$ normal: $\|T^2\| = \|T\|^2$? 6,5

- On a toujours $\|T^2\| \leq \|T\|^2$.
- Soit T normal: $\|T\|^2 \leq \|T^2\|$?

Si $T = T^*$: $\forall x \in B(0,1)$:

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \quad \textcircled{1}$$

$$= \langle T^2x, x \rangle \leq \|T^2\|, \text{ alors } \|T\|^2 \leq \|T^2\|.$$

d'où l'égalité.

Dans le cas T normal: on a T^*T est autoadjoint

$$\text{Alors } \|T^*T\|^2 = \|(T^*T)^2\| = \|T^*T T^*T\| = \|T^2 T^{*2}\| \quad \left(\begin{array}{l} \text{car} \\ T \text{ normal} \end{array} \right)$$

$$\text{Finalement } \|T^*T\|^2 \leq \|T^2\| \|T^{*2}\|; \text{ et donc } \quad \textcircled{1}$$

$$\|T^*T\| \leq \|T\|^2. \quad \textcircled{1,5}$$

Alors pour tout x de la boule unité, on utilise:

$$\text{C-S: } \|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \leq \|T^*T\| \|x\|^2 = \|T^*T\|$$

$$\text{Donc } \|T\|^2 \leq \|T^2\|. \quad \textcircled{1}$$

(0.7 pts)
Exo 2 :

$$1) \quad I : (E, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_1).$$

Il est clair que I est linéaire bijective. (0.5)

$$\bullet \quad \|I f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt \leq \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| = \|f\|_\infty, \text{ alors}$$

I est continue.

$$\bullet \quad \|I\| \leq 1; \text{ (d'après ce qui précède)}$$

Pour $f_1 \in E$; $f(t) = 1$ ($\forall t \in [0,1]$); on a :

$$\|I f_1\|_1 = \|f_1\|_\infty = 1; \text{ alors } \|I\| = 1. \quad (1)$$

2) Par l'absurde, supposons que I^{-1} est continue
alors $\exists C > 0 : \forall f \in E; \|I^{-1} f\|_\infty = \|f\|_\infty \leq C \|f\|_1.$ (0.5)

Prenons la suite $(f_n) \in E : f_n(t) = t^n.$

$$\|f_n\|_\infty = 1, \|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}, \text{ ce qui donne}$$

$$1 \leq \frac{C}{n+1} \text{ i.e. } C \geq n+1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}). \text{ Contradiction}$$

Car $n!$ est non majoré; alors I^{-1} n'est pas continue. (0.5)

3) Si $(E, \|\cdot\|_1)$ est un Banach; $I : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$
est une bijection entre 2 Banach; alors d'après le Th.
d'isomorphisme de Banach on aura I^{-1} est continue;

ce qui n'est pas le cas.

Alors $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet. (2)

Exo 3: 1) $H = L^2([- \pi, \pi])$ Hilbert

$$(Tx)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s) x(s) ds$$

$$\forall t \in [-\pi, \pi]; \text{ on a } |Tx(t)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(t-s)| |x(s)| ds$$

$$= |Tx(t)|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(t-s)|^2 ds \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |x(s)|^2 ds.$$

1

$$\cos^2(t-s) = \frac{1 + \cos 2(t-s)}{2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2(t-s)}{2} ds = \left[\frac{s}{2} - \frac{\sin 2(t-s)}{4} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \left[\frac{2\pi - \sin(2t - 2\pi)}{4} \right] - \left[\frac{-2\pi - \sin(2t + 2\pi)}{4} \right] = \pi$$

$$|Tx(t)|^2 \leq \pi \cdot \|x\|_2^2 \Rightarrow$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |Tx(t)|^2 dt \leq 2\pi^2 \|x\|_2^2 \Rightarrow \|Tx\|_2 \leq \pi\sqrt{2} \|x\|_2 < \infty$$

$$Tx \in H = L^2([- \pi, \pi]).$$

1

D'après ce qui précède : $\|T\| < \pi\sqrt{2}$.

2) $\forall x, y \in H$; D'après Fubini

$$\begin{aligned} \langle Tx, y \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} (Tx)(t) \overline{y}(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s) x(s) ds \right) \overline{y}(t) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} x(s) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s) \overline{y}(t) dt \right) ds \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} x(s) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(s-t) \overline{y}(t) dt \right) ds \quad (\cos: \text{pair}) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} x(s) \overline{y(s)} ds = \langle x, Ty \rangle \end{aligned}$$

Alors $T^* = T$.

3) $\frac{\partial [\cos(t-s)x(s)]}{\partial t} = -\sin(t-s)x(s)$ et

$$|-\sin(t-s)x(s)| \leq |x(s)|; \text{ alors } (Tx)'(t) \text{ existe}$$

$$\text{et } (Tx)'(t) = - \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t-s)x(s) ds.$$

De même; on peut démontrer l'existence de $(Tx)''(t)$

$$(Tx)''(t) = - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)x(s) ds = -(Tx)(t).$$

Tx est une solution de l'E.D $X'' + X = 0$.

ex 3

4) i) En utilisant question (03): 1

$$X(t) = a \cos t + b \sin t = T x(t); \quad (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

$$T x(0) = a = \int_{-\pi}^{\pi} \cos s x(s) ds$$

$$T x\left(\frac{\pi}{2}\right) = b = \int_{-\pi}^{\pi} \sin s x(s) ds$$

ii) 1

$$(T x)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t \sin s + \sin t \cos s) x(s) ds$$

$$= \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos s x(s) ds \right) \cos t + \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin s x(s) ds \right) \sin t$$



Faculté : Sciences Exactes
Département : Mathématiques

كلية :
قسم : العلوم الدقيقة الرياضيات

مسابقة الدخول لدكتوراه الطور الثالث، ل م د 2021/2020
Concours d'accès au doctorat 3^e cycle, LMD 2020/2021

الاختصاص : تحليل رياضي وتطبيقاته / Analyse mathématique et ses applications

الخيار رقم : 2 Variante :

اختبار :	تحليل رياضي وتطبيقاته / Analyse mathématique et ses applications	المعامل :	03
المعامل :	02 ساعة	المدة :	03
التوقيت :	6/03/2021	التاريخ :	15:00
المعامل :	02	المدة :	03
التوقيت :	6/03/2021	التاريخ :	15:00

Exercice 01 (05 points)

Soit H un espace de Hilbert complexe et A, B deux opérateurs sur H . Montrer que les opérateurs AB et BA ont même rayon spectral.

Exercice 02 (08 points)

Soit S le shift à droite sur $l^2(\mathbb{C})$ i.e. l'unique opérateur linéaire continu vérifiant, $S(e_n) = e_{n+1}$

où $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la base hilbertienne canonique de $l^2(\mathbb{C})$, $e_n := (0, 0, 0, \dots, \underset{n}{1}, 0, 0, \dots)$

1. Déterminer l'adjoint de S .
2. Expliquer pourquoi S n'est pas compact.
3. Déterminer les valeurs propres de S et S^* .
4. Montrer que le spectre de S et de S^* est inclus dans le disque unité fermé.

Exercice 03 (07 points):

Soit $f \in L^2([0; 1])$. On considère le problème aux limites
$$\begin{cases} x''(t) = f(t) \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases} \quad (I)$$

1) Montrer que (I) a une solution unique de la forme

$$x(t) = (Tf)(t) = \int_0^1 k(t, s) f(s) ds, \quad (II)$$

$$\text{où } k(t, s) = \begin{cases} s(t-1); & \text{si } 0 \leq s \leq t \\ t(s-1); & \text{si } t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

2) Réciproquement, vérifier que pour toute $f \in L^2([0; 1])$, la fonction Tf définie en (II) est deux fois dérivable sur $[0, 1]$ et est une solution de (I). En déduire que 0 n'est pas une valeur propre de l'opérateur T

3) Si f est une fonction associée à la valeur propre λ . Démontrer que λ est non nulle si et seulement si, f non nulle, deux fois dérivable et vérifie

$$\begin{cases} f''(t) = \frac{1}{\lambda} f(t) \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases} \quad (III)$$

Version 2

Ex 2 1) Il suffit de déterminer l'image de S^* sur la base Hilbertienne Canonique.

$$\langle e_{n+1}, e_m \rangle = \langle S(e_n), e_m \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } n+1 = m \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par définition $\langle e_n, S^*(e_m) \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ c. a. d. $S^*(e_n) = e_{n-1}$ en particulier $S^*(e_0) = 0$.

2) S : envoie la famille bornée $(e_n)_{n \geq 1}$ qui ne peut pas avoir de valeurs d'adhérence dans $\ell^2(\mathbb{C})$ puisque dans cet espace ses éléments sont distants deux à deux de $\sqrt{2}$.

3) On remarque $S(\ell^2(\mathbb{C}))$ ne contient des éléments dont le 1er terme est nul. On en déduit que si $S(u) = \lambda u$, alors $u = 0$ puisque $(Su)_{n+1} = u_n$. On a donc $\sigma(S) = \emptyset$. Pour le Shift à gauche $S^*(u) = \lambda u$ conduit à $u_{n+1} = \lambda u_n$ et donc par récurrence les vecteurs propres éventuels associés à $\lambda \in \mathbb{C}$ doivent être sur la droite de $\ell^2(\mathbb{C})$ dirigée vers le vecteur $(\lambda^n)_n$. mais pour que celui-ci soit de carré sommable il est nécessaire que $|\lambda| < 1$.

~~Ex 1~~

4) il s'agit de démontrer que $|\lambda| > 1$ les opérateurs $S - \lambda I$ et $S^* - \lambda I$ sont inversibles dans $\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{C}))$.

Ex 1

Exo 3 V(2) Solution d'exercice (2)

1) ~~poson~~ $x''(t) = f(t) \Rightarrow x(t) = A + \int_0^t f(u) du$

et $x(t) = At + B + \int_0^t \left(\int_0^u f(s) ds \right) du$

A et B sont des constantes d'appari t'ubem

$$\int_0^t \left(\int_0^u f(s) ds \right) du = \int_0^t \left(f(s) \int_s^t du \right) ds = \int_0^t (t-s) f(s) ds$$

d'où $x(t) = At + B + \int_0^t (t-s) f(s) ds$

$x(0) = 0 \Rightarrow B = 0$ et $x(1) = 0 \Rightarrow A = - \int_0^1 (1-s) f(s) ds$

donc $x(t) = \int_0^t s(t-1) f(s) ds + \int_t^1 t(s-1) f(s) ds$
 $= \int_0^1 K(t,s) f(s) ds$ où $K(t,s) = \begin{cases} s(t-1) & \text{si } 0 \leq s \leq t \\ t(s-1) & \text{si } t \leq s \leq 1 \end{cases}$

2) d'après 1) $Kf(t) = (t-1) \int_0^t s f(s) ds + t \int_t^1 (s-1) f(s) ds$

$(Kf)'(t) = \int_0^t s f(s) ds + t f(t) + \int_t^1 (s-1) f(s) ds - t(t-1) f(t)$

$(Kf)''(t) = t f(t) - (t-1) f(t) = f(t)$ avec $f(0) = 0 = f(1)$

3) si $Kf = 0 \Rightarrow f = 0$ donc $\lambda = 0$ n'est pas v.p e.à.d. K est injectif.

Si $\lambda \neq 0$ et me $f \neq 0$, $Kf = \lambda f$ en dérivant 2 fois on obtient

$(Kf)'' = \lambda f''$ et d'après (2) on a

(IV) $\begin{cases} f'' = \frac{1}{\lambda} f \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$

Réciproquement si $f \neq 0$ d'après le syst (IV) on obtient $Kf = \lambda f$.