

الإجابة النموذجية

الشعبة: رياضيات تطبيقية

التخصص: equations différentielles et applications

المادة: مادة التخصص

Faculté : Sciences Exactes
Département : Des Mathématiques



العلوم الدقيقة
الرياضيات
كلية :
قسم :

مسابقة الدخول لدكتوراه الطور الثالث، ل م د 2021/2020

Concours d'accès au doctorat 3^e cycle, LMD 2020/2021

Spécialité :	Equation Différentielles et Applications	الاختصاص :
Variante :	1	الخيار رقم :
Epreuve :	Equation Différentielles et Applications	اختبار :
Durée :	ساعتين	المدة :
Date :	6/03/2021	التاريخ :
		Coefficient :
		Heure :
		المعامل :
		التوقيت :

Exercice 01 : (6 points)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert (non vide) borné et assez régulier. Étant donné $f \in L^2(\Omega)$, on considère le problème

$$(P_{var}) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^2(\Omega), & \text{tel que} \\ \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_j^2} dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx, & \forall v \in H^2(\Omega). \end{cases}$$

1. Quelles sont les hypothèses du théorème de Lax-Milgram vérifiées par le problème (P_{var}) ?
2. Peut-on utiliser le théorème de Lax-Milgram pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (P_{var}) ? (justifier votre réponse).

Exercice 02 : (6 points)

Soient $E = C([a, b], \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions réelles continues sur $[a, b]$, muni de la norme de la convergence uniforme notée par $\|\cdot\|_E$, $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, $\varphi \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On

considère l'opérateur $A : E \rightarrow E$ défini par $Au(t) = \varphi(t) + \lambda \int_a^t K(t, s)u(s)ds$

1. Montrer par récurrence sur n que $\exists M > 0 : \|A^n u - A^n v\|_E \leq \frac{(\lambda M(b-a))^n}{n!} \|u - v\|_E \quad \forall u, v \in E$
2. Dédire que pour tout réel λ , l'équation

$$u(t) = \varphi(t) + \lambda \int_a^t K(t, s)u(s)ds,$$

admet une unique solution dans E .

Exercice 03 : (8 points) Considérons l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$\frac{d^2x(t, \varepsilon)}{dt^2} + \varepsilon(x^2(t, \varepsilon) - 1) \frac{dx(t, \varepsilon)}{dt} + (1 + a\varepsilon)x(t, \varepsilon) = 0, x(0, \varepsilon) = A, \frac{dx(0, \varepsilon)}{dt} = 0, \quad (1)$$

où $0 < \varepsilon \ll 1$, et λ, a deux constantes réelles.

1. Trouver la solution approximative de Lindstedt du premier ordre de l'équation (1).
2. Appliquer la méthode de la moyenne pour trouver une solution approximative de l'équation (1).

Exercice 1 (Corrigé).

• $H^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

• La seule forme bilinéaire est

$$a(u, v) \doteq \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} dx \quad \forall u, v \in H^2(\Omega)$$

$a(\cdot, \cdot)$ est bien une forme bilinéaire continue sur $H^2(\Omega)$. (inégalité de Hölder).

• La forme linéaire sur $H^2(\Omega)$: $L(v) \doteq \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$ est continue sur $H^2(\Omega)$. (inégalité de Hölder). $\forall v \in H^2(\Omega)$.

2. Non, on ne peut pas utiliser le Th. de Lax-Milgram pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (P_{var}) , parce que $a(\cdot, \cdot)$ n'est pas coercive sur $H^2(\Omega)$. C'est une condition nécessaire pour appliquer le Th. de Lax-Milgram.

En effet, toute fonction v constante et non nulle, elle appartient à $H^2(\Omega)$, mais elle ne vérifie pas

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H^2(\Omega)}^2 \text{ pour un } \alpha > 0.$$

$$v \equiv e^{ikx} \neq 0 \Rightarrow 0 = a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H^2(\Omega)}^2 > 0.$$

Ce qui est impossible!

(Par exemple la fonction $v(x) = 1, \forall x \in \Omega$).

Exo 2 (variante 1) (06 pts)

$$\begin{aligned}
 1) |Au(t) - A\phi(t)| &= \left| \lambda \left(\int_a^t K(t,s) u(s) ds - \int_a^t K(t,s) \phi(s) ds \right) \right| \\
 &\leq |\lambda| \int_a^t |K(t,s)| |u(s) - \phi(s)| ds \leq |\lambda| \max_{a \leq t, s \leq b} K(t,s) \int_a^t \max |u(s) - \phi(s)| ds \\
 &= |\lambda| M (t-a) \|u - \phi\| \quad / \quad M = \max_{a \leq t, s \leq b} K(t,s) \quad (1, \checkmark)
 \end{aligned}$$

On suppose que :

$$|A^n u(t) - A^n \phi(t)| \leq \frac{(|\lambda| M (t-a))^n}{n!} \|u - \phi\|$$

on a :

$$\begin{aligned}
 |A^{n+1} u(t) - A^{n+1} \phi(t)| &= \left| \lambda \int_a^t K(t,s) (A^n u(s) - A^n \phi(s)) ds \right| \\
 &\leq |\lambda| M \int_a^t |A^n u(s) - A^n \phi(s)| ds \leq |\lambda| M \int_a^t \frac{(|\lambda| M (s-a))^n}{n!} \|u - \phi\| ds \\
 &= \frac{(|\lambda| M (t-a))^{n+1}}{(n+1)!} \|u - \phi\| \quad (1, \checkmark)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \|A^{n+1} u - A^{n+1} \phi\| &= \max_{a \leq t \leq b} |A^{n+1} u(t) - A^{n+1} \phi(t)| \\
 &\leq \frac{(|\lambda| M (b-a))^{n+1}}{(n+1)!} \|u - \phi\| \quad (0,5)
 \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut choisir n assez grand

$$\text{tq } \frac{(|\lambda| M (b-a))^{n+1}}{(n+1)!} < 1 \quad (0,7 \checkmark)$$

Ainsi, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel A^n est contractant
par suite A admet un point fixe unique (1,2)
qui n'est autre que la solution de l'équation
intégrale: (2,1)

$$u(t) = \lambda \int_a^b K(t,s) u(s) ds + \varphi(t)$$

المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها

6 مارس 2021

حل التمرين 3-1: (8 نقاط)

لتكن المعادلة التفاضلية غير الخطية التالية:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \epsilon (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + (1 + a\epsilon)x = 0, \quad x(0) = A, \quad \frac{dx(0)}{dt} = 0. \quad (1)$$

حيث a و λ ثوابت حقيقية ، و ϵ عدد موجب صغير.

1. لدينا .

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \epsilon \left(- (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} - ax \right) \Rightarrow F = - (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} - ax$$

الحل التقريبي للاندست من الرتبة الاولى هو

$$y(\theta, \epsilon) = y_0(\theta) + \epsilon y_1(\theta) \quad (2)$$

(نقطة 0.5)

$$\omega(\epsilon) = 1 + \epsilon\omega_1 + \dots \quad (3)$$

و المعادلات $y_0(\theta)$, $y_1(\theta)$ و هم

$$\ddot{y}_0 + y_0 = 0, \quad (0.5 \text{ نقطة}) \quad (4)$$

$$\ddot{y}_1 + y_1 = -2\omega_1\dot{y}_0 - \dot{y}_0^2, \quad (0.5 \text{ نقطة}) \quad (5)$$

حل المعادلة (4) هو $y_0(\theta) = A \cos \theta$ (0.5 نقطة) نعوض النتيجة في المعادلة (5)، نجد

$$\ddot{y}_1 + y_1 = \left(-A + \frac{A^3}{4} \right) \sin \theta + \frac{A^3}{4} \sin 3\theta - (aA + 2A\omega_1) \cos \theta. \quad (1 \text{ نقطة}) \quad (6)$$

عدم ظهور حدود مسيطره ، يعني ذلك $\omega_1 = \frac{-a}{2}$ و $A = 2$ (نقطة 0.5+0.5) إذا تم حل المعادلة التفاضلية الناتجة عن $y_1(\theta)$ ، تحت الشروط الابتدائية $y_1(0) = \dot{y}_1(0) = 0$ إذن

$$y_1(\theta) = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta. \quad (1 \text{ نقطة}) \quad (7)$$

أخيرا، التقريبي الاول لحل المعادلة (1)

$$y(\theta, \epsilon) = 2 \cos \theta + \epsilon \left(\frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta \right)$$

حيث $\theta = \omega t$ و

$$\omega(\epsilon) = 1 - \epsilon \left(\frac{a}{2} \right) + O(\epsilon). \quad (8)$$

2. طبق طريقه المتوسط لإيجاد حل تقريبي للمعادلة (1). لدينا $\omega = 1$.

$$F = -(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} - ax = (-A^2 \sin^2 \theta + 1) A \cos \theta - a A \sin \theta = -A^3 \sin^2 \theta \cos \theta + A \cos \theta - a A \sin \theta$$

فإن

$$\begin{cases} \dot{A} = \frac{-c}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta (-A^3 \sin^2 \theta \cos \theta + A \cos \theta - a A \sin \theta) d\theta, \\ \dot{\Phi} = \frac{c}{2A\pi\omega} \int_0^{2\pi} \sin \theta (-A^3 \sin^2 \theta \cos \theta + A \cos \theta - a A \sin \theta) d\theta. \end{cases} \quad (1 \text{ نقطة}) \quad (9)$$

$$\Rightarrow \dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{cA}{2\pi} (A^2 I_{2,2} - I_{0,2}) = \frac{cA}{2\pi} (A^2 \frac{1}{4} 2\pi - \frac{1}{2} 2\pi) = \frac{cA}{8} (A^2 - 4) \quad (1 \text{ نقطة})$$

$$\Rightarrow A(t) = \frac{2}{\left[\left(\frac{4}{A_0^2} - 1\right)e^{-ct} + 1\right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (1 \text{ نقطة})$$

من جهة أخرى

$$\dot{\Phi}(t) = \frac{ca}{2} \Rightarrow \Phi(t) = \frac{cat}{2} + \Phi_0, \Phi_0 = \frac{\pi}{2}. \quad (1 \text{ نقطة})$$

$$x(t) = \frac{2}{\left[\left(\frac{4}{A_0^2} - 1\right)e^{-ct} + 1\right]^{\frac{1}{2}}} \sin \left(t + \frac{cat}{2} + \frac{\pi}{2} \right). \quad (1 \text{ نقطة})$$

ومنه الحل التقريبي يعطى بـ (1 نقطة)

Faculté : Sciences Exactes
Département : Des Mathématiques



كلية : العلوم الدقيقة
قسم : الرياضيات

مسابقة الدخول لذكوراه الطور الثالث، ل م د 2021/2020

Concours d'accès au doctorat 3^e cycle, LMD 2020/2021

الاختصاص : Equation Différentielles et et Applications

Spécialité :

الخيار رقم : 2 Variante :

اختبار : Equation Différentielles et Applications Epreuve :

المعامل : 02 Coefficient : المدة : ساعتين Durée :

التوقيت : 15:00 Heure : التاريخ : 6/03/2021 Date :

Exercice 1 : (6 points)

Soit $f \in L^2(]0,1[)$. Considérons le problème

$$(P) \begin{cases} -\frac{d^2u}{dt^2}(t) = f(t), \text{ pour } t \in]0,1[, \\ \frac{du}{dt}(0) = \frac{du}{dt}(1) = 0. \end{cases}$$

1. Déterminer une condition nécessaire sur f (qu'on admettra dans la suite), pour que le problème (P) ait une solution.
2. Soit $H_m = \{v \in H^1(]0,1[) : \int_0^1 v(t)dt = 0\}$ le sous-espace des fonctions à moyenne nulle dans $H^1(]0,1[)$. Montrer que H_m muni de la norme de $H^1(]0,1[)$ est un espace de Hilbert.
3. Rappeler l'inégalité de Poincaré pour les éléments de $H_0^1(]0,1[) \subset H^1(]0,1[)$, (et on supposera que cette inégalité est vérifiée aussi dans H_m).
4. Formuler le problème variationnel associé à (P), et montrer qu'il est bien posé.

Exercice 2 : (6 points)

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} = x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases}, \mu \geq 0. \quad (1)$$

1. Appliquer la méthode de Bifurcation de Holph à (1).
2. Quel genre, et que concluez-vous?

(On donne $a = \frac{1}{16} [f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}] + \frac{1}{16\omega} [(f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy})) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}]$).

Exercice 3 : (8 points)

Considérons l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$\frac{d^2x(t, \varepsilon)}{dt^2} + \varepsilon(x^2(t, \varepsilon) - 1) \frac{dx(t, \varepsilon)}{dt} + x = 0, x(0, \varepsilon) = A, \frac{dx(0, \varepsilon)}{dt} = 0, \quad (2)$$

où $0 < \varepsilon \ll 1$.

1. Utiliser la méthode de Lindstedt pour trouver une solution approximative du premier ordre de l'équation (2).
2. Appliquer la méthode de moyennisation pour trouver une solution approximative, l'amplitude et étudier la stabilité du cycle limite de l'équation (2).
3. Montrer que: Si on a $x = r \cos \theta$ et $|\varepsilon \cos \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin \theta| < 1$,
donc $\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r (1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta + O(\varepsilon^2)$.

Exercice 1 (Corrigé).

1. En intégrant par partie l'équation entre 0 et 1, on a
$$-\int_0^1 u''(t) dt = \int_0^1 f(t) dt, \text{ or } \int_0^1 u''(t) dt = u'(1) - u'(0) = 0$$

Donc il est nécessaire que $\int_0^1 f(t) dt = 0$.

Autrement dit, la condition nécessaire sur f est :
 f est une fonction à moyenne nulle sur $]0, 1[$.

2. H_m est un sous-espace fermé dans $H^1(]0, 1[)$, puisque c'est le noyau de la forme linéaire continue

$$\ell : H^1(]0, 1[) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } \ell(v) = \int_0^1 v(x) dx.$$

$H_m = \text{Ker}(\ell)$. Donc H_m est complet dans $H^1(]0, 1[)$. Par conséquent c'est un espace de Hilbert.

$$\left(\text{En effet, } |\ell(v)| \leq \int_0^1 |v(x)| dx \leq \|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \|v\|_{H^1(]0, 1[)} \right)$$

Hölder

3. $\exists c > 0$ ($c = c_{\text{const}} = c_{\text{const}}(]0, 1[)$) telle que

$$\|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq c \|v'\|_{L^2(]0, 1[)} \quad \forall v \in H_0^1(]0, 1[).$$

4. Trouver $u \in H_m$ t.q
- $$\begin{cases} a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H_m \end{cases}$$

$$\text{où } a(u, v) = \int_0^1 u'(t) \cdot v'(t) dt \quad \forall u, v \text{ dans } H_m$$

$$L(v) = \int_0^1 f(t) v(t) dt \quad \forall v \in H_m$$

Vue l'inégalité (*) dans H_m , lorsque H_m est muni de la norme $\|v\|_m = \|v'\|_{L^2(]0, 1[)}$ est un Hilbert. .../...

- H_m est un espace de Hilbert

- $|a(u, v)| \leq \underset{\text{Hölder}}{\|u'\|_{L^2(I_0, I)}} \cdot \underset{\text{Hölder}}{\|v'\|_{L^2(I_0, I)}} = \|u\|_m \cdot \|v\|_m$
(la continuité)

- $a(v, v) = \int_0^1 v'(t) v'(t) dt = \|v\|_m^2$ (la coercivité :
avec $\alpha = 1$:
 $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_m^2$).

- La forme L trivialement linéaire, elle est continue dans H_m . En effet,

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \int_0^1 |f(t) \cdot v(t)| dt \leq \underset{\text{Hölder}}{\|f\|_{L^2(I_0, 1)}} \cdot \|v\|_{L^2(I_0, 1)} \\ &\leq c \|f\|_{L^2(I_0, 1)} \cdot \|v\|_{L^2(I_0, 1)} \\ &= M \cdot \|v\|_m \end{aligned}$$

Par conséquent, le problème variationnel associé à (P) possède une solution unique dans H_m : u . d.q.

~~$\exists f \mapsto u$~~

l'application $L^2(I_0, 1) \ni f \mapsto u \in H_m$ est continue (th. Lax-Milgram).

Donc le pb. est bien posé.

المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها
6 مارس 2021

حل التمرين 2-2: (6 نقاط)
لتكن الجملة الديناميكية غير الخطية التالية:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu x - y - x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} = x + \mu y - y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad \mu \geq 0. \quad (1)$$

* تطبيق نظرية تشعب هوبف على الجملة (1):
نلاحظ أن المبدأ (0, 0) هو نقطة توازن للنظام.
المصفوفة اليعقوبية للنظام عند المبدأ هي:

$$J = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

لدينا

$$P_J(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \mu & -1 \\ 1 & \lambda - \mu \end{vmatrix} = (\lambda - \mu)^2 + 1.$$

القيم الذاتية للمصفوفة J مركبة ومترافقة ومساوية لـ $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$ (1 نقطة)

$$\text{sgn}(w) = \text{sgn}\left(\frac{\partial g_\mu}{\partial x} \Big|_{\mu=0} (0, 0)\right) = 1, w = 1. \quad (0.5 نقطة) \quad 1.$$

$$\frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \Big|_{\mu=0} = 1 = d > 0. \quad (0.5 نقطة) \quad 2.$$

$$a = \frac{1}{16} [f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}] + \frac{1}{16} [(f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy})) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}]. \quad 3.$$

$$f_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{\mu=0} (0, 0) = -6, f_{xyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \Big|_{\mu=0} (0, 0) = -2, g_{xxy} = \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{\mu=0} (0, 0) = -2, g_{yyy} = \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \Big|_{\mu=0} (0, 0) = -6$$

$$a = \frac{1}{16} [-6 - 2 - 2 - 6] = -1.$$

نعوض في a فنجد: (1 نقطة)

- لأن $ad = -1.1 = -1 < 0$ فيوجد حل دوري لأن $\mu > 0$. (0.5 نقطة)
- لأن $d = 1 > 0$, نقطة التوازن (0, 0) غير مستقرة لأن $\mu > 0$. (0.5 نقطة)
- لأن $a = -1 < 0$ إذن التشعب هو حرجة فائقة مما يعني أن المدار الدوري مستقر (0.5+0.5 نقطة)

exercice 3-2 (8 points) : Soit l'équation différentielle de Van Der Pol suivante:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = \epsilon (1 - y^2) \frac{dy}{dt}, \quad 0 < \epsilon \ll 1, \quad (1)$$

avec les conditions initiales $y(0) = A$ et $dy(0)/dt = 0$.

Réponses

1. Approximation de Lindstedt, pour l'ordre ϵ , la solution de l'équation (1) est

$$y(\theta, \epsilon) = A \cos \theta + \epsilon \left[\left(\frac{11}{11} A^3 - \frac{A}{2} \right) \sin \theta - \frac{A^3}{32} \sin 3\theta \right]. \quad (1pt) \quad (2)$$

tq $\theta = \omega t = (1 + 0(\epsilon)) t$ (0.5 pt), pourque $\omega_1 = \frac{-1}{2A\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta F(A \cos \theta, -A \sin \theta) d\theta = 0$. (1.5 pt)

2. On a $\omega = 1$, $F(x, \dot{x}) = (x^2 - 1) \dot{x}$, donc le système s'écrit

$$(0.5pt) \begin{cases} \dot{A} = \frac{-\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} A \cos^2 \theta (1 - A^2 \sin^2 \theta) d\theta, \\ \dot{\Phi} = \frac{\epsilon}{2\pi A \omega} \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta (1 - A^2 \sin^2 \theta) d\theta. \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{A} &= \frac{dA}{dt} = \frac{\epsilon A}{2\pi} (I_{0,2} - A^2 I_{2,2}) = \frac{\epsilon A}{2\pi} \left(\frac{1}{2} 2\pi - A^2 \frac{1}{4} 2\pi \right) = \frac{\epsilon A}{8} (4 - A^2) \\ \Rightarrow \int \frac{dA}{A(4 - A^2)} &= \frac{\epsilon}{8} \int dt \Rightarrow 8 \int \left(\frac{1}{4A} + \frac{1}{8(2 - A)} - \frac{1}{8(2 + A)} \right) dA = \epsilon t + \ln(c) \\ \Rightarrow 2 \ln A - \ln(2 - A) - \ln(2 + A) &= \epsilon t + \ln(c) \\ \Rightarrow \ln \left(\frac{A^2}{c(4 - A^2)} \right) &= \epsilon t. \end{aligned}$$

$$\text{Posons } A(0) = A_0 \Rightarrow c = \frac{A_0^2}{4 - A_0^2},$$

d'autre part

$$\ln \left(\frac{A^2}{c(4 - A^2)} \right) = \epsilon t \Rightarrow \frac{A^2}{c(4 - A^2)} = e^{\epsilon t} \Rightarrow A^2 = c(4 - A^2) e^{\epsilon t} \Rightarrow A^2(t) = \frac{\frac{4A_0^2}{4 - A_0^2} e^{\epsilon t}}{1 + \frac{A_0^2}{4 - A_0^2} e^{\epsilon t}}$$

$$\Rightarrow A(t) = \frac{2}{[(\frac{4}{A_0^2} - 1)e^{-\epsilon t} + 1]^{\frac{1}{2}}}. \quad (0.5 \text{ pt})$$

Notons que $A(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 2$ indépendamment de A .

D'autre part

$$\dot{\Phi}(t) = 0 \Rightarrow \Phi(t) = \Phi(0) = \Phi_0 = \frac{\pi}{2}. \quad (0.5 \text{ pt})$$

$$\text{La solution est donnée approximativement par } x(t) = \frac{2}{[(\frac{4}{A_0^2} - 1)e^{-\epsilon t} + 1]^{\frac{1}{2}}} \sin \left(t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (0.5 \text{ pt})$$

* la stabilité du cycle de l'équation de Van Der Pol: On a $\dot{A} = \frac{\epsilon A}{8} (4 - A^2)$;

$$G(A) = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ et } A = \pm 2 \Rightarrow A = 2. \quad (0.5 \text{ pt})$$

* Si l'amplitude $A = 0$: correspond au point d'équilibre (le cycle limite = point d'équilibre);

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \epsilon(x^2 - 1)y, \end{cases}$$

$$\text{le point d'équilibre} \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ -x - \epsilon(x^2 - 1)y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (0, 0).$$

** Si l'amplitude $A = 2$, on a

$$\begin{cases} x(t) = 2\sin(t + \Phi_0), \\ \dot{x}(t) = 2\cos(t + \Phi_0) \end{cases} \Rightarrow x^2(t) + \dot{x}^2(t) = 4 \Rightarrow A = 2 \text{ correspond au cycle limite.}$$

1. Stabilité de cycle limite $G'(A) = \frac{\epsilon}{8}(4 - 3A^2) \Rightarrow G'(2) = -\epsilon$, (0.5 pt)

* Si $\epsilon > 0$: $G'(2) = -\epsilon < 0$, donc on a un cycle limite stable.

** Si $\epsilon < 0$: $G'(2) = -\epsilon > 0$, donc on a un cycle limite instable.

2. Stabilité du point d'équilibre $G'(A) = \frac{\epsilon}{8}(4 - 3A^2) \Rightarrow G'(0) = \frac{\epsilon}{2}$, (0.5 pt)

* Si $\epsilon > 0$: $G'(0) > 0$, donc $A = 0$ est instable.

** Si $\epsilon < 0$: $G'(0) < 0$, donc $A = 0$ est stable.

5. On a $x = r\cos\theta$ et $|\epsilon\cos\theta(1 - r^2\cos^2\theta)\sin\theta| < 1$ donc $\frac{dr}{d\theta} = -\epsilon r(1 - r^2\cos^2\theta)\sin^2\theta + O(\epsilon^2)$

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \epsilon(x^2 - 1)y, \end{cases}$$

$$x = r\cos\theta, y = -r\sin\theta$$

$$\begin{cases} \dot{r} = -\epsilon r(1 - r^2\cos^2\theta)\sin^2\theta, & (1 \text{ pt}) \\ \dot{\theta} = -1 + \epsilon\cos\theta(1 - r^2\cos^2\theta)\sin\theta. & (0.5 \text{ pt}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = \frac{\epsilon r(1 - r^2\cos^2\theta)\sin^2\theta}{-1 + \epsilon\cos\theta(1 - r^2\cos^2\theta)\sin\theta}, \quad \alpha = \epsilon\cos\theta(1 - r^2\cos^2\theta)\sin\theta$$

$$\text{puisque } |\alpha| < 1 : \frac{1}{-1+\alpha} = -1 - \alpha - \alpha^2 - \dots = -1 + O(\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = \epsilon r(1 - r^2\cos^2\theta)\sin^2\theta(-1 + O(\epsilon)) \quad (0.5 \text{ pt})$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = -\epsilon r(1 - r^2\cos^2\theta)\sin^2\theta + O(\epsilon^2)$$

Faculté :

Sciences Exactes

Département :

Des Mathématiques



العلوم الدقيقة

الرياضيات

كلية:

قسم:

مسابقة الدخول لدكتوراه الطور الثالث، ل م د 2021/2020

Concours d'accès au doctorat 3^e cycle, LMD 2020/2021

Spécialité :

Equations Différentielles et Applications

الاختصاص:

Variante :

3

الخيار رقم:

Epreuve :

Equations Différentielles et Applications

اختبار:

Durée :

ساعتين

المدة:

Coefficient :

02

المعامل:

Date :

6/03/2021

التاريخ:

Heure :

15:00

التوقيت:

Exercice 01 : (6 points)

Soit $f \in L^2(]0,1[)$.

1. Étant donné $t_0 \in [0, 1]$, montrer que $|v(t_0)| \leq \sqrt{2}\|v\|_{H^1(]0,1[)}, \forall v \in H^1(]0,1[)$.

2. Formuler le problème variationnel, et montrer l'existence et l'unicité de la solution faible du problème aux valeurs limites suivant

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dt^2}(t) + u(t) = f(t), \text{ pour } t \in]0, 1[, \\ \frac{du}{dt}(0) = u(0), \quad \frac{du}{dt}(1) = -1. \end{cases}$$

Exercice 02 : (6 points)

Soient $E = C([a, b], \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions réelles continues sur $[a, b]$, muni de la norme de la convergence uniforme notée par $\|\cdot\|_E$, $K: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Fixons un élément $\varphi \in E$. Donner une condition suffisante sur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que l'équation

$$u(t) = \varphi(t) + \lambda \int_a^t K(t, s)u(s)ds,$$

admette une solution unique dans E .

Exercice 03 : (8 points)

Soit le système différentiel
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + \mu(x + 2xy^2) \\ \frac{dy}{dt} = x + \mu(-3y + 6x^2y^2) \end{cases}, \mu \geq 0. \quad (1)$$

1. Appliquer la méthode de Bifurcation de Holph à (1). Quel genre, et que concluez-vous?

2. Si $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, calculer $\frac{dr}{d\theta}$.

(On donne $a = \frac{1}{16} [f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}] + \frac{1}{16\omega} [(f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy})) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}]$).

Exercice 1 (corrigé)

1. $\forall t_0 \in [0, 1]$, on a pour $v \in H^1(J_0, 1[)$

$$v(t_0) = v(t) + \int_t^{t_0} v'(s) ds \quad \text{d'où} \quad |v(t_0)| \leq |v(t)| + \int_0^1 |v'(s)| ds$$

$$\Rightarrow |v(t_0)| \leq \underset{\text{Hölder}}{\|v\|_{L^2(J_0, 1[)}} + \|v'\|_{L^2(J_0, 1[)}$$

$$\leq \sqrt{2} \left(\|v\|_{L^2(J_0, 1[)}^2 + \|v'\|_{L^2(J_0, 1[)}^2 \right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{2} \|v\|_{H^1(J_0, 1[)}$$

2. Formulation du P.b. variationnel.

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(J_0, 1[) \text{ t.q.} \\ a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H^1(J_0, 1[). \end{cases}$$

$$\text{où } a(u, v) = \int_0^1 u'(t) \cdot v'(t) dt + \int_0^1 u(t) \cdot v(t) dt + u(0) \cdot v(0) \quad u, v \in H^1(J_0, 1[)$$
$$L(v) = \int_0^1 f(t) v(t) dt - v(1), \quad \forall v \in H^1(J_0, 1[).$$

L'existence et l'unicité de la solution faible du P.b. aux valeurs limites, est ainsi assurée par le Th.

de Lax-Milgram.

• Continuité de $a(\cdot, \cdot)$.

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \|u'\|_{L^2} \cdot \|v'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \cdot \|v\|_{L^2} + \underbrace{|u(0)| \cdot |v(0)|}_{\text{1.}^\text{re} \text{ q.}^\text{st.}} \\ &\leq \|u'\|_{L^2} \cdot \|v'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \cdot \|v\|_{L^2} + 2 \|u\|_{H^1} \cdot \|v\|_{H^1} \\ &\leq 4 \|u\|_{H^1} \cdot \|v\|_{H^1}. \end{aligned}$$

- $a(\cdot, \cdot)$ est coercive

$\forall v \in H^1(J_0, 1)$, on a :

$$a(u, v) = \int_0^1 |v'(t)|^2 dt + \int_0^1 |v(t)|^2 dt + |v(0)|^2 \geq \|v\|_{H^1}^2$$

($\alpha=1$)

- L est continue.

$\forall v \in H^1(J_0, 1)$

$$|L(v)| \leq \int_0^1 |f(t)| \cdot |v(t)| dt + |v(1)| \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|v\|_{L^2} + \sqrt{2} \|v\|_{H^1}$$

$\begin{matrix} H^1 \text{ Pde} \\ + \\ 1^{\text{er}} \text{ question} \end{matrix}$

$$\leq (\|f\|_{L^2} + \sqrt{2}) \|v\|_{H^1}.$$

- $H^1(J_0, 1)$ est un espace de Hilbert.

Par conséquent, toutes les hypothèses du Th. de Lax-Milgram étant vérifiées, le P.b. variationnel admet une solution unique, qui est la solution faible du P.b. aux valeurs limites.

ex 3) (06 pts)

A l'opérateur défini par: $A: E \rightarrow E$

$$Au(t) = \varphi(t) + \lambda \int_a^t K(t,s) u(s) ds$$

puisque K et φ sont continues, A est bien défini. (1,5)

On a: pour tout $u, v \in E$:

$$\|Au(t) - Av(t)\| \leq |\lambda| \int_a^t |K(t,s)| \|u(s) - v(s)\| ds$$

$$\leq |\lambda| \max_{a \leq t, s \leq b} K(t,s) \|u - v\|_E \int_a^t ds$$

$$\leq |\lambda| \max_{a \leq t, s \leq b} K(t,s) (b-a) \|u - v\|_E$$

(l'existence de $\max K$ est garantie par la continuité de K)

Donc pour $|\lambda| \max_{a \leq t, s \leq b} K(t,s) (b-a) < 1$, A est contractant (0,5)

et par suite, A admet un point fixe unique dans E (Principe de contraction de Banach) (1,5)

Le point fixe de A , n'est autre que la solution cherchée (0,5)

المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها
6 مارس 2021

حل التمرين 3-3: (8 نقاط)
نعتبر النظام الديناميكي غير الخطي التالي:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + \mu(x + 2xy^2), \\ \frac{dy}{dt} = x + \mu(-3y + 6x^2y^2). \end{cases}, \mu \geq 0. \quad (1)$$

1. طبق نظرية تشعب هوبف على الجملة (1). وما نوعه؟

* تطبيق نظرية تشعب هوبف على الجملة (2):
نلاحظ أن المبدأ (0, 0) هو نقطة توازن للنظام. (نقطة 0.5)
المصفوفة اليعقوبية للنظام عند المبدأ هي:

$$J = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & -3\mu \end{pmatrix}. \quad (0.5 \text{ نقطة})$$

لدينا

$$P_J(\lambda) = \begin{vmatrix} \mu - \lambda & -1 \\ 1 & -3\mu - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda\mu - 3\mu^2 + 1 = 0$$

القيم الذاتية للمصفوفة J مركبة ومترافقة ومساوية لـ $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\sqrt{1 - 4\mu^2}$ (1 نقطة)

$$\text{sgn}(w) = \text{sgn}\left(\frac{\partial g_\mu}{\partial x} \Big|_{\mu=0} (0, 0)\right) = 1, w = 1. \quad (0.5 \text{ نقطة}) \quad 1.$$

$$\frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \Big|_{\mu=0} = -1 = d < 0. \quad (0.5 \text{ نقطة}) \quad 2.$$

$$a = \frac{1}{16} [f_{xx} + f_{yy} + g_{xx} + g_{yy}] + \frac{1}{16} [(f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy})) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}] \quad 3.$$

$$a = \frac{1}{16} [4] = \frac{1}{4}. \quad (1 \text{ نقطة}) \quad \text{نعوض في } a \text{ فنجد:}$$

$$\bullet \text{ لأن } ad = -\frac{1}{4} < 0 \text{ فيوجد حل دوري لأن } \mu > 0. \quad (0.5 \text{ نقطة})$$

$$\bullet \text{ لأن } d = -1 < 0, \text{ نقطة التوازن } (0, 0) \text{ مستقرة لأن } \mu > 0. \quad (0.5 \text{ نقطة})$$

$$\bullet \text{ لأن } a > 0 \text{ إذن التشعب هو دون حرجة مما يعني أن المدار الدوري غير مستقر } (0.5+0.5 \text{ نقطة})$$

$$2. \text{ من أجل } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \text{ أحسب } \frac{dr}{d\theta}$$

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = x(-y + \mu(x + 2xy^2)) + y(x + \mu(-3y + 6x^2y^2)) = \mu x^2 + 2x^2y^2 + 6\mu x^2y^3 + 3y^2$$

$$\Rightarrow \dot{r} = \mu r \cos^2 \theta + 2r^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 6\mu r^4 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + 3r \sin^2 \theta \quad (1 \text{ نقطة})$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{r^2} (x\dot{y} - y\dot{x}) = \mu r [\cos^2 \theta (1 + 2r^2 \sin^2 \theta) + \sin^2 \theta (-3 + 6r^3 \cos^2 \theta \sin \theta)] \quad (1 \text{ نقطة})$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = \frac{\mu r \cos^2 \theta + 2r^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 6\mu r^4 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + 3r \sin^2 \theta}{\mu r [\cos^2 \theta (1 + 2r^2 \sin^2 \theta) + \sin^2 \theta (-3 + 6r^3 \cos^2 \theta \sin \theta)]}$$