Université Echahid Hamma Lakhdar d'Eloued
Faculté de technologie
Département : Génie Electrique

Année universitaire 2020/2021
Matière : Vibration et ondes
Parcours : 2ème Licence électronique

Mercredi 26/01/2022

Examin (60 min)

<u>التمرين 01 :</u>

نظام كهربائي مكون من وشيعة L، ومقاومة R و مكثفة C موضوعون على التسلسل.

1.اوجد المعادلة التفاضلية للحركة بدلالة الشحنة q؟

2.اوجد المعادلة التفاضلية للدارة بدلالة شدة التيار i ، ماذا تلاحظ ؟

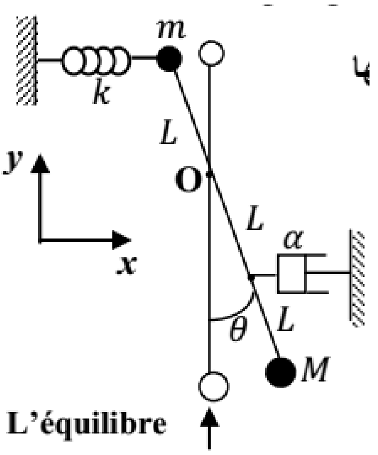
3. ماهي طبيعة الحركة ؟ وماهي العوامل المميزة الحركة ؟

4. إذا كانت $R=\sqrt{(L/C)}$ ، ما هو نوع التخامد ؟

5. اوجد حل المعادلة التفاضلية ؟ وسعة الحركة ω_a؟

<u>التمرين 02 :</u>

عارضة طولها 3L تحمل في نهايتيها كتلتين M وm يمكنها الدوران حول نقطة O. جملة التخامد معبر عنها بمخمد معامله α .عند الاتزان النابض يكون غير مشوه و العارضة عمودية.



1.اوجد الطاقة الحركية T, الطاقة الكامنة U و دالة ضياع الطاقة D .

2.اوجد لاغرانجيان الجملة L و المعادلة التفاضلية للحركة.

استنتج δ و ω_0 ؟

تعطى : $\sin \theta = \theta, \cos \theta = 1 - \theta^2/2$

حل التمرين الأول (11 نقاط)

1) إيجاد المعادلة التفاضلية للحركة بدلالة الشحنة q:

بما أن: $u_C = \frac{q}{C}$ (0.25) ; $u_L = L\frac{di}{dt}$ (0.25)

$u_L = L\frac{d\dot q}{dt} = L\ddot q$ (0.25)

$u_R = R.i = R\frac{dq}{dt} = R\dot q$ (0.25)

حسب قانون كيرشوف: $u_R+u_L+u_C=0$ (0.5)

ومنه $L\ddot q + R\dot q + \frac{q}{C} = 0$ (0.5)

$\Rightarrow \ddot q + \frac{R}{L}\dot q + \frac{L}{C}q = 0$ (0.5)

$\ddot q + 2\delta\dot q + \omega_0^2 q = 0$

2) إيجاد المعادلة التفاضلية للحركة بدلالة شدة التيار:

$u_R = R\,i(t)$ (0.25) ; $u_L = L\frac{di(t)}{dt}$ (0.25)

$u_C = \frac{q(t)}{C}$ (0.25)

حسب قانون كيرشوف $u_R+u_L+u_C=0$ (0.25)

$R\,i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0$ ...(1) (0.5)

باشتقاق (1) نجد:

$R\frac{di(t)}{dt} + L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}\frac{dq(t)}{dt} = 0$ (0.5)

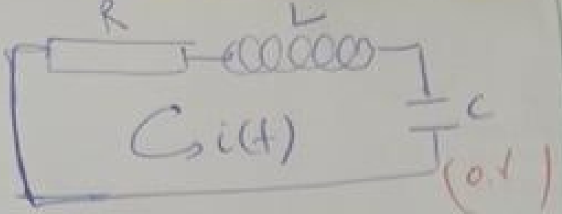
$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ (0.5)

ومنه $L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = 0$

أي $\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC}i(t) = 0$ (0.5)

الملاحظة: نلاحظ أن المعادلتين نفس الشكل! (0.5)

3) طبيعة الحركة: هي معادلة من الدرجة الثانية لحركة اهتزازية حرة مخمدة لنظام ذو درجة حرية واحدة. (01)



(0.5)

- العوامل المميزة للحركة
- عامل التخامد: $\delta = \frac{R}{2L}$ (0.5)
- النبض الطبيعي (الخاص) للنظام: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (0.5)

4) نوع التخامد: $R = \sqrt{L/C}$

$R = \sqrt{\frac{L}{C}}$; $\delta = \frac{R}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{LC}}$ (0.25)

$< \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ $(\delta < \omega_0)$ (0.25)

لدينا $\delta < \omega_0$ معناه الحركة تخامد ضعيف. (0.5)

5) إيجاد حل المعادلة التفاضلية:

$i(t) = C.e^{-\delta t}.\sin(\omega_a t + \varphi)$ (0.5)

+ إيجاد سرعة الحركة ω_a

$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ (0.5)

الاستدراكية

حل التمرين الثاني (3ن) x2

1) عدد درجات الحرية $x(t)$

$ddl = 1$ — إن $ddl = N = 1$ (0,5)

N هو عدد الإحداثيات المعممة المستقلة (x) (0,5)

2) حساب لاغرانج النظام L:

$L = T - U$ (0,5)

+ الطاقة الحركية: $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ (0,5)

+ الطاقة الكامنة U:

$U = U_k + U_m$ (0,25)

$U_m = mgh = 0 \quad (h = 0)$

$U = U_k = \frac{1}{2} k(\Delta l - x)^2$ (0,5)

باستخدام شرط التوازن

$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$ (0,5)

$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2} \cdot k(-1)(\Delta l - x)\Big|_{x=0} = 0$

$-k\Delta l = 0 \Rightarrow \Delta l = 0$ (0,5)

ومنه

$U = \frac{1}{2} k x^2$ (0,25)

* دالة الضياع "التخميد":

$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$ (0,5)

ومنه دالة لاغرانج

$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$ (0,5)

3) كتابة المعادلة التفاضلية للحركة بدلالة δ و ω_0:

بما أن $ddl = 1$ و α موجود و $F(t)$ غير موجودة

إذن لدينا نظام ذو درجة حرية واحدة مخمد وغير قسري (0,5) ومعادلته التفاضلية تكتب من الشكل

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$$ (0,5)

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \quad (0,25) \; (0,25) \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \quad (0,25) \; ; \; \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha \dot{x} \quad (0,25) \end{cases}$$

$\Rightarrow m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x}$ (0,5)

ومنه المعادلة التفاضلية تكتب من الشكل

$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ (0,5)

$\Rightarrow \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

بحيث

$2\delta = \frac{\alpha}{m}$ (0,25)

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ (0,25)

+ استنتاج ω_a:

$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \Rightarrow \omega_a = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}$ (0,25) (0,25)

4) من أجل $\delta < \omega_0$ إيجاد حل المعادلة التفاضلية للحركة في الشروط الابتدائية

$\dot{x}(0) = x_0 \; ; \; x(0) = x_0$

بما أن $\delta < \omega_0$ فإن حل المعادلة من الشكل

$x(t) = C e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi)$ (0,5)

$C = ? \; ; \; \varphi = ?$

$x(0) = C \cdot (1) \sin\varphi = x_0$

$\Rightarrow \boxed{C = \frac{x_0}{\sin\varphi}}$ (0,5)

$x(t) = C e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi)$ (0,5)

$\Rightarrow \dot{x}(t) = -C\delta e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi) + C\omega_a e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi)$

$\dot{x}(0) = -C\delta(1)\sin\varphi + C\omega_a \cos\varphi = 0$

$\delta \sin\varphi = \omega_a \cos\varphi$ (0,5)

$\Rightarrow \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\omega_a}{\delta} \Rightarrow \boxed{tg\,\varphi = \frac{\omega_a}{\delta}}$ (0,5)

ومنه

$x(t) = \frac{x_0}{\sin\varphi} e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi)$ (0,5)

University El-Oued | faculty of technology | Departments of GE and GP
Grade : ST_L2 | Mathematics 3 | 2021/2022
Name :.. | Specialty :...................... | Group : ....

EXAM (60 minutes)

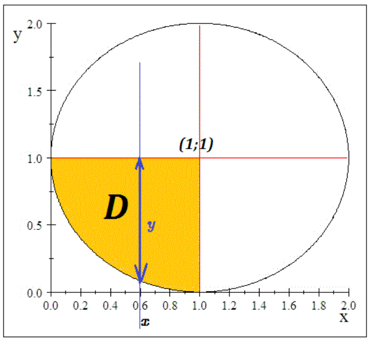
Exercise 01 : En effectuant un changement de variables ($x = 1 - \sin t$).
Calculer : $I = \int_0^1 x\sqrt{1-(x-1)^2}dx$.
Réponse : La variable x décrit $[0,1]$ lorsque la variable t décrit $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $dx = -\cos t dt$. On en déduit

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x\sqrt{1-(x-1)^2}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1-\sin t)\sqrt{1-(1-\sin t-1)^2}\,(-\cos t dt) \\ &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1-\sin t)\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin t)\cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos^2 t dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

♣♣♣♣♣

Exercise 02 : Soit l'ensemble des points $D = \left\{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \text{ et } (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1\right\}$
Dessiner le domaine D, puis calculer l'intégrale $\iint_D xdxdy$.

Réponse :
1)



2) La condition $(x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1$ équivaut à $|y-1| \le \sqrt{1-(x-1)^2}$ et, comme $0 \le y \le 1$ on a nécessairement $y \ge 1 - \sqrt{1-(x-1)^2}$. Alors $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 1 - \sqrt{1-(x-1)^2} \le y \le 1\right\}$.
On calcule l'intégrale

$$\begin{aligned} \iint_D xydxdy &= \int_0^1 \left(\int_{1-\sqrt{1-(x-1)^2}}^1 xdy\right)dx = \int_0^1 \left(x\,[y]_{1-\sqrt{1-(x-1)^2}}^1\right)dx \\ &= \int_0^1 x\sqrt{1-(x-1)^2}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.\text{(d'après } \textbf{Exercise 01)} \end{aligned}$$

♣♣♣♣♣

Exercise 03 : Montrer que $u_n = \frac{\ln(n!)}{n!} \le v_n = \frac{n^2}{n!}$, puis conclure la nature de la séries $\sum \frac{\ln(n!)}{n!}$
Réponse :1) On a $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1 \le nn\ldots n = n^n$ d'où $\ln(n!) \le \ln(n^n) = n\ln n \le n^2$.
Alors, $u_n = \frac{\ln(n!)}{n!} \le v_n = \frac{n^2}{n!}$.

2) On applique la règle de D'Alembert : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = 0.$
La série $\sum \frac{n^2}{n!}$ est convergente donc, $\sum \frac{\ln(n!)}{n!}$ est convergente (d'après la règle de comparaison).

Exercise 04 : Soit f la fonction 2π_périodique définie par $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

1) Tracer le graphe de la fonction f sur$[-\pi; \pi]$
2) Écrire la sérier de Fourier $S(t)$ associée à f.

Réponse : Calculons ses coefficients de Fourier : On a f est impaire donc $a_0 = a_n = 0$ et

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \sin(nt)\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin(nt)\, dt \\ &= \frac{1}{\pi n} [\cos(nt)]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi n} [\cos(nt)]_{0}^{\pi} = \frac{1}{\pi n} (2 - \cos(-n\pi) - \cos(n\pi)) \\ &= \frac{2}{\pi n} (1 - \cos(n\pi)) = \begin{cases} 0, \text{ pour } n = 2k \text{ pair,} \\ \dfrac{4}{\pi n}, \text{ pour } n = 2k+1 \text{ impair} \end{cases} \end{aligned}$$

La série de Fourier de la fonction considérée s'écrit donc

$$f(t) = S(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}, \text{ pour } t \neq -\pi, \pi.$$

♣♣♣♣♣

Exercise 05 : 1) Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{1}{(p+1)p^2}$

2) Utiliser la transformée de Laplace pour déterminer la solution d'équation différentielle $y''(t) = e^{-t}$, avec $y(0) = y'(0) = 0$.

Indication : $\mathcal{L}(t^n e^{-at})(p) = \dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}$.

Réponse :1) On pose $\dfrac{1}{(p+1)p^2} = \dfrac{Ap+B}{p^2} + \dfrac{1}{p+1} = \dfrac{(A+1)p^2 + (A+B)p + B}{(p+1)p^2}$

On tire B et $A = -1$ d'où

$$\frac{1}{(p+1)p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}.$$

2) On applique la transformée de Laplace on aura

$$\mathcal{L}y''(p) = p^2 \mathcal{L}y(p) = \mathcal{L}\left(e^{-t}\right)(p) = \frac{1}{p+1}$$

On en déduit

$$\mathcal{L}y(p) = \frac{1}{p^2(1+p)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} \quad \text{(d'après 1)}$$

Retrouvons y en appliquant la transformée de Laplace inverse, on trouve

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right) \\ &= t - 1 + e^{-t}. \end{aligned}$$

Université d'El Oued — Sujet : A — Niveau : 2 ELT, TEL, ELN
A.U : 2021/2022 — « Examen d'Electrotechnique fondamentale 1 (ELTF1) » — Dr. N.B
Remarque : Il est interdit d'utiliser la couleur rouge =ملاحظة: يمنع منعا باتا استعمال اللون الأحمر

Questions de cours : (4 pts)

1- Quelles sont les conditions qui assurent l'obtention d'un système triphasé équilibré.
(ما هي الشروط التي تضمن الحصول على نظام ثلاثي الطور متزن من دون شرح).

1) $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$ 0.5
2) Le déphasage entre les courants ou les tensions est constant $= 2\pi/3$ 0.5
3) $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$ 0.5
4) $V_1 = V_2 = V_3 = V$ 0.5

2- Soit v(t)=120cos(ωt). Quelle est la valeur **crête à crête** de la tension ? $V_{c\text{-}c} = 240\,V$ 1

3- Soit v(t)=3+**33.33**cos(3ωt)+**20**cos(5ωt). Trouver V_{moy} sans calcul : $V_{moy} = 3\,V$ 1
(جد القيمة المتوسطة للتوتر من دون اللجوء للحساب بالتكامل).

Exercice N° 1 : (10 pts)

Soient les éléments en séries suivants : une résistance R= 15 Ω, une bobine d'inductance L= 12 mH et un condensateur de capacité C=200 µF. Chacun de ces éléments est soumis à une tension sinusoïdale :

$$u(t) = 230\sqrt{2}cos(120\pi.t)$$

1- Déterminer la valeur de la fréquence d'alimentation f et la valeur de l'impédance Z.

On a : $\omega = 2\pi f = 120\pi \Rightarrow \boxed{f = 60\,Hz}$ 1

D'autre part, $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ / $X_L = 2\pi f L$ et $X_C = \frac{1}{2\pi f C}$

$\begin{cases} X_L = 4{,}521\,\Omega \\ X_C = 13{,}26\,\Omega \end{cases}$

Donc $\boxed{Z = 17{,}36\,\Omega}$ 2

2- Calculer le facteur de puissance FP et le courant I.

- FP = ? $FP = \cos\varphi = R/Z = \boxed{0{,}86 = FP}$ ou $\varphi = tg^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$ 2
- I = ? $V = ZI \Rightarrow I = \frac{V}{Z} = \frac{230}{17{,}36} \Rightarrow \boxed{I = 13{,}24\,A}$ 1

3- Calculer les puissances : P, Q et S.

✓ $P = RI^2 = \boxed{2629{,}46\,W}$ 1
✓ $Q = (X_L - X_C)I^2 = \boxed{-1532{,}1\,VAR}$ 1
✓ $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = VI = \boxed{3045{,}2\,VA}$ 1

4- Quel est le type du circuit (Justifier votre choix : فقط الإجابة المبررة مقبولة)? 1

On a : $X_L < X_C \Rightarrow \varphi < 0$, donc, le circuit est capacitif.

Exercice N° 2 : (6 pts)

Une ligne triphasée alternative sinusoïdale équilibrée de 230/400 V (f=50Hz) alimente trois impédances identiques avec neutre $\underline{Z}=R+jX_L$.

L'ensemble des trois impédances consomment des puissances totales qui ont les valeurs suivantes : $7630\ VA$, $4000\sqrt{3}\ W$ et $3200\ VAR$.

1- Calculer le courant de phase J et la valeur de la résistance R de chaque impédance.

2- Calculer X_L en déduisant la valeur de Z.

Solution :

1) $J = ?$, $R = ?$

On a : $S = \sqrt{3}\,UI$ $\begin{cases} U = \sqrt{3}\,V \\ I = J \end{cases}$ / $U = 400V$

$\Rightarrow S = \sqrt{3}\,UJ \Rightarrow J = \dfrac{S}{\sqrt{3}\,U} = \dfrac{7630}{\sqrt{3}(400)}$

Donc, $\boxed{J = 11{,}01\ A}$ 1,5

D'autre part, $P_1 = RJ^2$ et $P = 3P_1 = 4000\sqrt{3}\ W$

où, $P_1 = \dfrac{P}{3} = 2309{,}4W$

$\Rightarrow \boxed{R = \dfrac{P_1}{J^2} = 19{,}04\ \Omega}$ 1,5

2) $X_L = ?$, $Z = ?$

On a, $Q_1 = X_L I^2 = X_L J^2$ / $Q_1 = \dfrac{Q}{3} = \dfrac{3200}{3} = 1066{,}66VAR$

$\Rightarrow \boxed{X_L = \dfrac{Q_1}{J^2} = 8{,}8\ \Omega}$ 1,5

1,5

et $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \boxed{20{,}97\ \Omega}$

BONNE REUSSITE

بالتوفيق للجميع